

### 3. DIE AXIOME DER ZERMELO-FRAENKEL'SCHEN MENGENLEHRE

Die Signatur der Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre ZF ist  $\mathcal{L}_{ZF} = \{\in\}$ , wobei  $\in$  ein 2-stelliges Relationssymbol ist. Anstelle von  $\in yx$  schreiben wir  $y \in x$  und sagen "y ist Element von x", und für  $\neg(y \in x)$  schreiben wir  $y \notin x$ .

#### DAS AXIOMENSYSTEM VON ZERMELO

Im Jahr 1905 begann Ernst Zermelo die Mengenlehre zu axiomatisieren und publizierte 1908 sein erstes Axiomensystem, das aus folgenden sieben Axiomen bestand:

- (a) *Axiom der Bestimmtheit*  
besagt, dass eine Menge durch ihre Elemente bestimmt ist
- (b) *Axiom der Elementarmengen*  
besagt, dass es gewisse Mengen gibt, wie z.B. leere Menge oder Paarmenge
- (c) *Axiom der Aussonderung*  
besagt, dass aus Mengen gewisse Teilmengen ausgesondert werden können
- (d) *Axiom der Potenzmenge*  
besagt, dass zu jeder Menge die Menge ihrer Teilmengen existiert
- (e) *Axiom der Vereinigung*  
besagt, dass wir Mengen von Mengen vereinigen können
- (f) *Axiom der Auswahl*  
besagt, dass cartesische Produkte nicht-leerer Mengen nicht leer sind
- (g) *Axiom des Unendlichen*  
besagt, dass es eine Menge gibt, die nicht endlich ist.

Die Axiome (a)–(e) und Axiom (g) (d.h. alle Axiome ausser dem Auswahlaxiom), sind die Axiome 0–6 der *Zermelo-Fraenkel'schen Mengenlehre*, welche im folgenden Abschnitt eingeführt werden.

#### DIE AXIOME 0–6

##### 0. Axiom der leeren Menge.

$$\exists x \forall z (z \notin x)$$

Das *Axiom der leeren Menge* besagt, dass eine Menge existiert, welche keine Elemente besitzt. Insbesondere existiert mindestens eine Menge, nämlich eine leere Menge.

##### 1. Extensionalitätsaxiom.

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

Das *Extensionalitätsaxiom* besagt, dass zwei Mengen, welche dieselben Elemente besitzen, identisch sind. Die Umkehrung dieser Implikation folgt aus dem logischen Axiom  $L_{15}$ .

Aus dem Axiom der leeren Menge folgt mit dem Extensionalitätsaxiom, dass die **leere Menge** eindeutig ist; diese wird mit  $\emptyset$  bezeichnet.

Wir definieren nun das binäre Relationssymbol  $\subseteq$  für **Teilmenge** wie folgt:

$$y \subseteq x : \iff \forall z(z \in y \rightarrow z \in x)$$

Beachte, dass  $\emptyset \subseteq x$  für jede Menge  $x$  gilt. Weiter definieren wir das binäre Relationssymbol  $\subsetneq$  für **echte Teilmenge** durch

$$y \subsetneq x : \iff y \subseteq x \wedge y \neq x.$$

## 2. Paarmengenaxiom.

$$\forall x \forall y \exists u \forall z (z \in u \leftrightarrow (z = x \vee z = y))$$

Das *Paarmengenaxiom* besagt, dass für alle Mengen  $x$  und  $y$  immer eine Menge  $u$  existiert, welche nur die Mengen  $x$  und  $y$  als Elemente besitzt. Für die Menge, welche nur  $x$  und  $y$  enthält, schreiben wir  $\{x, y\}$ . Beachte, dass aus dem Extensionalitätsaxiom die Gleichheit  $\{x, y\} = \{y, x\}$  folgt, und dass für  $x = y$  die Gleichheit  $\{x, y\} = \{x\}$  gilt.

Mit dem Paarmengenaxiom können wir nun wie folgt auch **geordnete Paare** definieren:

$$\langle x, y \rangle := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Es lässt sich einfach zeigen, dass gilt

$$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle \iff x = x' \wedge y = y',$$

und somit können wir das binäre Funktionssymbol  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  wie folgt definieren:

$$\langle x, y \rangle = u : \iff \forall z(z \in u \leftrightarrow (z = \{x\} \vee z = \{x, y\}))$$

Analog könnten wir auch geordnete Tripel, Quadrupel, etc., definieren, doch das wird einfacher, wenn wir mehr Axiome zur Verfügung haben.

## 3. Vereinigungsaxiom.

$$\forall x \exists u \forall z (z \in u \leftrightarrow \exists w(w \in x \wedge z \in w))$$

Das *Vereinigungsaxiom* besagt, dass zu jeder Menge  $x$  eine Menge  $u$  existiert, welche alle Mengen enthält, welche Elemente von Elementen von  $x$  sind.

Mit dem Vereinigungsaxiom können wir die **unäre Vereinigungsfunktion**  $\bigcup$  wie folgt definieren:

$$\bigcup x = u : \iff \forall z(z \in u \leftrightarrow \exists w(w \in x \wedge z \in w))$$

Zum Beispiel gilt  $x = \bigcup\{x\}$ . Mit Hilfe des Vereinigungsaxioms und des Paarmengenaxioms können wir die **binäre Vereinigungsfunktion**  $\cup$  wie folgt definieren:

$$x \cup y := \bigcup\{x, y\}$$

Ebenfalls mit dem Vereinigungsaxiom und dem Paarmengenaxiom, und durch die Definition  $x + 1 := x \cup \{x\}$ , können wir zum Beispiel folgende Mengen bilden:

$$0 := \emptyset$$

$$1 := 0 + 1 = 0 \cup \{0\} = \{0\}$$

$$2 := 1 + 1 = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\}$$

$$3 := 2 + 1 = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\}$$

Allgemein können wir jede natürliche Zahl  $n$  identifizieren mit der Menge  $\{0, \dots, n-1\}$ , wobei die leere Menge  $\emptyset$  der Zahl 0 entspricht. Diese Konstruktion führt zu folgender Definition: Eine Menge  $x$  heisst **induktiv**, falls

$$\forall y(y \in x \rightarrow (y \cup \{y\}) \in x).$$

Formal definieren wir ein 1-stelliges Relationssymbol  $\text{ind}$  wie folgt:

$$\text{ind}(x) :\iff \forall y(y \in x \rightarrow (y \cup \{y\}) \in x)$$

Einerseits ist die leere Menge  $\emptyset$  induktiv, d.h.  $\text{ind}(\emptyset)$ . Andererseits können wir aus den bisherigen Axiomen nicht beweisen, dass es auch nicht-leere induktive Mengen gibt – dies wird aber durch das nächste Axiom garantiert.

#### 4. Unendlichkeitsaxiom.

$$\exists I(\emptyset \in I \wedge \text{ind}(I))$$

Das *Unendlichkeitsaxiom* besagt, dass es eine nicht-leere induktive Menge gibt, welche die leere Menge enthält. Jede der oben konstruierten Mengen  $0, 1, 2, 3 \dots$  (d.h. jede natürliche Zahl) gehört zu jeder induktiven Menge  $I$  welche  $\emptyset$  enthält.

**5. Aussonderungssaxiom (Axiomenschema).** Für jede Formel  $\varphi(z)$  mit der einzigen freien Variable  $z$ , ist der folgend Satz ein Axiom:

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$$

Das *Aussonderungssaxiom* besagt, dass zu jeder Formel  $\varphi(z)$  und jeder Menge  $x$  eine Menge  $y$  existiert, so dass  $y$  genau diejenigen Elemente  $z$  von  $x$  enthält, für die  $\varphi(z)$  gilt. Etwas informeller können wir das Aussonderungssaxiom (bzgl.  $\varphi$ ) wie folgt ausdrücken: Für jede Menge  $x$  und jede Formel  $\varphi$  ist

$$\{z \in x : \varphi(z)\}$$

eine Menge. Beachte, dass uns das Aussonderungssaxiom nur erlaubt, aus bestehenden Mengen gewisse Elemente auszusondern und die “Kollektion” der ausgesonderten Elemente bildet dann eine Menge. Wir können aber im Allgemeinen keine Kollektionen von Mengen mit einer bestimmten Eigenschaft bilden, bzw. solche Kollektionen sind im Allgemeinen keine Mengen. Zum Beispiel ist für eine Menge  $x$  und  $\varphi(z) \equiv z \notin z$ ,  $\{z \in x : \varphi(z)\}$  eine Menge, aber die Kollektion  $\{z : \varphi(z)\}$  ist *keine* Menge.

Mit dem Aussonderungssaxiom können wir nun auch Durchschnitt und Differenz von Mengen definieren: Seien  $x_0$  und  $x_1$  Mengen und sei  $\varphi(z) :\equiv z \in x_0$  ( $x_0$  ist ein Parameter von  $\varphi$ ). Dann definieren wir das binäre Funktionssymbol  $\cap$  für **Durchschnitt** wie folgt:

$$x_0 \cap x_1 = y :\iff y = \{z \in x_1 : \varphi(z)\}$$

Um Formeln besser lesbar zu machen, definieren wir:

$$\exists x \in w \varphi(x) :\iff \exists x(x \in w \wedge \varphi(x))$$

$$\forall x \in w \varphi(x) :\iff \forall x(x \in w \rightarrow \varphi(x))$$

Analog zum Vereinigungssymbol  $\cup$ , und mit Hilfe von diesem, definieren wir mit der Formel  $\varphi(u) := \forall z \in x (u \in z)$  das unäre Durchschnittssymbol  $\cap$  durch

$$\cap x = y : \iff y = \left\{ u \in \bigcup x : \varphi(u) \right\}.$$

Beachte, dass die Gleichheit  $x \cap y = \cap \{x, y\}$  gilt. Mit  $\varphi(z) := z \notin y$  können wir das binäre Funktionssymbol  $\setminus$  für **Mengendifferenz** definieren durch

$$x \setminus y = u : \iff u = \{z \in x : \varphi(z)\}.$$

## 6. Potenzmengenaxiom.

$$\forall x \exists z \forall y (y \in z \leftrightarrow y \subseteq x)$$

Das *Potenzmengenaxiom* besagt, dass zu jeder Menge  $x$  eine Menge  $\mathcal{P}(x)$  existiert, die sogenannte **Potenzmenge** von  $x$ , deren Elemente die Teilmengen von  $x$  sind. Weil mit dem Extensionalitätsaxiom die Potenzmenge von  $x$  eindeutig ist, können wir formal das 1-stellige Funktionssymbol  $\mathcal{P}$  wie folgt definieren:

$$\mathcal{P}(x) = z : \iff \forall y (y \in z \leftrightarrow y \subseteq x)$$

### DEFINITIONEN UND KONSTRUKTIONEN AUS DEN AXIOMEN 0–6

*Die Menge  $\omega$ .* Als erstes definieren (bzw. konstruieren) wir mit den Axiomen 0–6 die Menge  $\omega$  als die kleinste induktive Menge, welche  $\emptyset$  enthält: Mit dem Unendlichkeitsaxiom existiert eine induktive Menge  $I_0$  welche  $\emptyset$  enthält. Mit dem Potenzmengenaxiom bilden wir die Potenzmenge  $\mathcal{P}(I_0)$  und mit dem Aussonderungssaxiom bilden wir dann zuerst die Menge aller  $X \in \mathcal{P}(I_0)$ , die induktiv sind und  $\emptyset$  enthalten, und bilden dann den Durchschnitt all dieser Mengen  $X$ . Die Menge  $\omega$  ist also wie folgt definiert:

$$\omega := \bigcap \{X \in \mathcal{P}(I_0) : \emptyset \in X \wedge \text{ind}(X)\}$$

Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass der Durchschnitt induktiver Mengen, welche  $\emptyset$  enthalten, wieder eine induktive Menge ist, welche  $\emptyset$  enthält; und weil  $\omega$  in jeder solchen Menge enthalten ist, ist  $\omega$  tatsächlich die kleinste induktive Menge, die  $\emptyset$  enthält.

Die Menge  $\omega$  ist auch die kleinste Menge, welche die “Menge”  $\mathbb{N}$  (im naiven Sinn) der natürlichen Zahlen  $0, 1, 2, \dots$  (wie wir sie oben definiert haben) enthält, d.h. “ $\mathbb{N} \subseteq \omega$ ”. Es sei hier erwähnt, dass aus dem *Gödel’schen Unvollständigkeitssatz* folgt, dass  $\mathbb{N} = \omega$  nicht beweisbar ist – insbesondere ist die Existenz der Menge  $\mathbb{N}$  formal nicht beweisbar. Da wir aber andererseits auch nicht “ $\mathbb{N} \subsetneq \omega$ ” zeigen können, dürfen wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Mengen  $\mathbb{N}$  und  $\omega$  identisch sind – insbesondere ist die Menge  $\mathbb{N}$  aus den Axiomen der Mengenlehre konstruierbar.

*Cartesische Produkte.* Für beliebige Mengen  $A$  und  $B$  definieren wir das binäre Funktionssymbol  $\times$  durch

$$A \times B := \{ \langle x, y \rangle : x \in A \wedge y \in B \}$$

wobei  $\langle x, y \rangle = \{ \{x\}, \{x, y\} \}$  ist. Die Menge  $A \times B$  heisst **cartesisches Produkt** von  $A$  und  $B$ . Beachte, dass das cartesische Produkt  $A \times B$  von  $A$  und  $B$  eine Teilmenge der Menge  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$  ist.

*Funktionen.* Mit Hilfe cartesischer Produkte können wir nun **Funktionen**  $f : A \rightarrow B$ , welche jedem Element der Menge  $A$  genau ein Element der Menge  $B$  zuordnen, als Teilmengen von  $A \times B$  auffassen. Die Menge aller Funktionen  $f : A \rightarrow B$ , welche wir mit  ${}^A B$  bezeichnen, ist definiert durch

$${}^A B := \{f \subseteq A \times B : \forall x \in A \exists! y \in B (\langle x, y \rangle \in f)\}$$

wobei  $\exists! y$  bedeutet, dass es genau ein  $y$  gibt, d.h.  $\exists! y \varphi(y)$  ist eine abgekürzte Schreibweise für

$$\exists y (\varphi(y) \wedge \forall z (\varphi(z) \rightarrow z = y)).$$

Für Funktionen  $f \in {}^A B$  schreiben wir üblicherweise  $f : A \rightarrow B$  und für  $\langle x, y \rangle \in f$  schreiben wir üblicherweise  $f(x) = y$ . Ist die Menge  $A$  ein cartesisches Produkt, zum Beispiel  $A = C_1 \times C_2$ , so ist  $f : A \rightarrow B$  eine 2-stellige Funktion. Wir können auch injektive, surjektive oder bijektive Funktionen definieren, zum Beispiel:

$$f \in {}^A B \text{ ist injektiv} \iff \forall x, x' \in A \forall y \in B ((\langle x, y \rangle \in f \wedge \langle x', y \rangle \in f) \rightarrow x = x')$$

Eine Menge  $A$  heisst **endlich**, falls eine Bijektion  $f : n \rightarrow A$  existiert für ein  $n \in \omega$ . Beachte, dass diese Definition von "endlich" nur dann mit dem richtigen Endlichkeitsbegriff übereinstimmt, wenn  $\mathbb{N} = \omega$ . Eine Menge  $A$  heisst **abzählbar**, falls eine Surjektion  $f : \omega \rightarrow A$  existiert, andernfalls heisst  $A$  **überabzählbar**. Beachte, dass insbesondere jede endliche Menge abzählbar ist.

*Cartesische Produkte und Relationen.* Mit Hilfe von Funktionen können wir nun auch allgemeine cartesische Produkte definieren: Seien  $A_\iota$  Mengen für jedes  $\iota \in I$  (für irgend eine Indexmenge  $I$ ). Dann ist für  $A := \bigcup \{A_\iota : \iota \in I\}$ , das **cartesische Produkt**  $\prod_{\iota \in I} A_\iota$  der Mengen  $A_\iota$  ( $\iota \in I$ ) die Menge aller Funktionen  $f \in {}^I A$  die aus jedem  $A_\iota$  ein Element auswählen, also:

$$\prod_{\iota \in I} A_\iota := \left\{ f \in {}^I A : \forall \iota \in I (f(\iota) \in A_\iota) \right\}$$

Gilt für alle  $\iota \in I$ ,  $A_\iota = A$  (für eine Menge  $A$ ), dann ist  $\prod_{\iota \in I} A_\iota = {}^I A$ . Ist  $I = n$  für ein  $n \in \omega$ , dann schreiben wir auch  $A^n$  anstelle von  ${}^n A$  und wir identifizieren  ${}^n A$  mit der Menge

$$A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-mal}}$$

Mit Hilfe endlicher cartesischer Produkte können wir nun auch Relationen definieren: Für eine Menge  $A$  und ein  $n \in \omega$ , ist  $R \subseteq A^n$  eine  **$n$ -stellige Relation** auf  $A$ .

Zwei Beispiele für Ordnungsrelationen:

- Eine binäre Relation  $R$  auf  $A$  ist eine **lineare Ordnung** auf  $A$ , falls  $R$  transitiv ist und für alle Elemente  $x, y \in A$  *Trichotomie* gilt (d.h. entweder  $xRy$ , oder  $x = y$ , oder  $yRx$ ).
- Eine lineare Ordnung  $R$  auf  $A$  ist eine **Wohlordnung** auf  $A$ , falls jede nicht-leere Teilmenge  $S \subseteq A$  ein  $R$ -minimales Element besitzt, d.h. es existiert ein  $x_0 \in S$ , sodass für alle  $y \in S$  gilt  $\neg yRx_0$ . Beachte, dass, weil  $R$  eine lineare Ordnung ist, das  $R$ -minimale Element  $x_0$  eindeutig ist. Falls eine Wohlordnung  $R$  auf der Menge  $A$  existiert, so sagen wir, dass  $A$  **wohlordenbar** ist.

Die Frage, ob jede Menge wohlordenbar ist, wird durch das *Auswahlaxiom*, welches wir später behandeln, beantwortet.

## DIE AXIOME 7 &amp; 8

Das nächste Axiom stammt von Abraham Fraenkel.

**7. Ersetzungsaxiom (Axiomenschema).** Um dieses Axiom zu formulieren, führen wir den Begriff der *Klassenfunktion* ein: Sei  $\varphi(x, y)$  eine Formel mit  $x, y \in \text{frei}(\varphi)$ , so dass gilt

$$\forall x \exists! y \varphi(x, y).$$

Dann ist das 1-stellige Funktionssymbol  $F$ , definiert durch

$$F(x) = y : \iff \varphi(x, y),$$

eine **Klassenfunktion**. Das *Ersetzungsaxiom* besagt, dass für jede Klassenfunktion  $F$  und für jede Menge  $A$ , das Bild von  $A$  unter  $F$  eine Menge ist, d.h.

$$F[A] := \{F(x) : x \in A\}$$

ist eine Menge. Etwas kürzer ausgedrückt: *Bilder von Mengen unter Funktionen sind Mengen*.

Mit dem Ersetzungsaxiom können wir Mengen wie zum Beispiel

$$\{\mathcal{P}(x) : x \in \mathcal{P}(\omega)\}$$

bilden; setze  $A = \mathcal{P}(\omega)$  und  $F(x) := \mathcal{P}(x)$ .

Das letzte Axiome ist zwar für die Mengenlehre wichtig, hat aber auf die allgemeine Mathematik keinen Einfluss.

**8. Fundierungsaxiom.**

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge (y \cap x = \emptyset))).$$

Das *Fundierungsaxiom* besagt, dass jede Menge wohlfundiert ist, d.h. jede nicht-leere Menge  $x$  besitzt ein Element  $y \in x$ , sodass kein Element von  $y$  ein Element von  $x$  ist.

Mit dem Fundierungsaxiom erhalten wir, dass es keine unendlich absteigenden Sequenzen der Form

$$x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots$$

gibt, denn sonst würde die Menge  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  dem Fundierungsaxiom widersprechen. Insbesondere gibt es keine Menge  $x$  für die  $x \in x$  gilt, und es gibt auch keine Zyklen wie zum Beispiel  $x_0 \in x_1 \in \dots \in x_n \in x_0$ .

Das Axiomensystem, bestehend aus den Axiomen 0–6 von Zermelo, dem Ersetzungsaxiom von Fraenkel, sowie dem Fundierungsaxiom, bildet die Axiome der **Zermelo–Fraenkel’schen Mengenlehre** und wird mit ZF bezeichnet.