4. KONSTRUKTION DER REELLEN ZAHLEN

Im Vorwort zu seiner Schrift *Stetigkeit und irrationale Zahlen* schreibt Richard Dedekind: *“Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik.* [...] *Für mich war damals dies Gefühl der Unbefriedigung ein so überwältigendes, dass ich den festen Entschluß faßte, so lange nachzudenken, bis ich eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Prinzipien der Infinitesimalanalysis gefunden haben würde.* [...] *Dies gelang mir am 24. November 1858.”*

In diesem Kapitel werden wir (in der Mengenlehre) aus den rationalen Zahlen ein Modell der reellen Zahlen konstruieren, und zwar so, wie es auch Dedekind gemacht hat, nämlich mit *Dedekind’schen Schnitten.*

DIE AXIOME DER REELLEN ZAHLEN

Die Signatur des Axiomensystems R der reellen Zahlen ist $\mathscr{L}_{\mathsf{R}} = \{\mathtt{0}, \mathtt{1}, +, \cdot, <\}$, wobei $\mathtt{0}$ und $\mathtt{1}$ Konstantensymbole sind, $+$ und $\cdot$ binäre Funktionssymbole sind und $<$ ein binäres Relationssymbol ist.

Die erste Gruppe des Axiomensystems R besteht aus den Körperaxiomen KT:

R_0: $\forall x \forall y \forall z \big(x + (y + z) = (x + y) + z\big)$ (+ ist *assoziativ*)

R_1: $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ (+ ist *kommutativ*)

R_2: $\forall x (\mathtt{0} + x = x)$ ($\mathtt{0}$ ist *link-neutral* bzgl. +)

R_3: $\forall x \exists y (y + x = \mathtt{0})$ (*links-Inverse* bzgl. +)

R_4: $\forall x \forall y \forall z (x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$ ($\cdot$ ist *assoziativ*)

R_5: $\forall x \forall y (x \cdot y = y \cdot x)$ ($\cdot$ ist *kommutativ*)

R_6: $\forall x (\mathtt{1} \cdot x = x)$ ($\mathtt{1}$ ist *link-neutral* bzgl. $\cdot$)

R_7: $\forall x \exists y (x \neq \mathtt{0} \rightarrow y \cdot x = \mathtt{1})$ (*links-Inverse* bzgl. $\cdot$ für $x \neq \mathtt{0}$)

R_8: $\forall x \forall y \forall z \big(x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)\big)$ ($\cdot$ ist *links-distributiv* über +)

R_9: $\mathtt{0} \neq \mathtt{1}$

Die zweite Gruppe des Axiomensystems R besteht aus den Axiomen für dichte lineare Ordnungen DLO:

R_{10}: $\forall x \neg (x < x)$ (< ist nicht *reflexiv*)

R_{11}: $\forall x \forall y \forall z \big((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z\big)$ (< ist *transitiv*)

R_{12}: $\forall x \forall y \big(x < y \vee x = y \vee y < x\big)$ (< definiert eine *lineare* Ordnung)

R_{13}: $\forall x \forall y \exists z \big(x < y \rightarrow (x < z \wedge z < y)\big)$ (< definiert eine *dichte* Ordnung)

R_{14}: $\forall x \exists y \exists z \big(y < x \wedge x < z\big)$ (keine grössten bzw. kleinsten Elemente)

Die dritte Gruppe des Axiomensystems R besteht aus zwei Axiomen, welche die Ordnungsstruktur mit den Rechenoperationen verbindet:

R_{15}: $\forall x \forall y \forall z \big(x < y \rightarrow x + z < y + z\big)$ (Kompatibilität von $<$ mit $+$)

R_{16}: $\forall x \forall y \big((0 < x \wedge 0 < y) \rightarrow 0 < x \cdot y\big)$ (Kompatibilität von $<$ mit $\cdot$)

Um das letzte Axiom, das **Vollständigkeitsaxiom** R_{17}, zu formulieren, müssen wir über Teilmengen von $\mathbb{R}$ sprechen. Insbesondere kann das Axiom R_{17} nur mit Hilfe der Mengenlehre – in der wir ein Modell der reellen Zahlen konstruieren – formuliert werden.

R_{17}: Jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ hat ein *Supremum* in $\mathbb{R}$.

Etwas formaler ausgedrückt, mit der Definition $x \leq y :\Longleftrightarrow\ x < y \vee x = y$, heisst das:

$$\forall X \Big(\big(X \subseteq \mathbb{R} \wedge X \neq \emptyset \wedge \exists r\, \forall x \in X\, (x \leq r)\big) \rightarrow \\ \exists s \left(\forall x \in X (x \leq s) \wedge \forall t \left(\forall x \in X (x \leq t) \rightarrow s \leq t \right)\right)\Big)$$

DEDEKIND'SCHE SCHNITTE

Wir konstruieren die reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, welche ihrerseits aus $\mathbb{N}$ (bzw. ω) und $\mathbb{Z}$ konstruiert wurden. Das heisst wir gehen aus von einem Modell $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, \mathtt{0}, \mathtt{1}, +, \cdot, <)$ der rationalen Zahlen, in dem die Axiome $\mathsf{R}_0 – \mathsf{R}_{16}$ gelten. Um weniger Fallunterscheidungen machen zu müssen, schränken wir uns auf die Konstruktion der positiven reellen Zahlen ein – die Konstruktion der negativen reellen Zahlen ist analog. Dafür definieren wir $\mathbb{Q}^+ := \{p \in \mathbb{Q} : p > 0\}$.

Ein **Dedekind'scher Schnitt** ist eine Teilmenge $\alpha \subseteq \mathbb{Q}^+$ mit folgenden Eigenschaften:

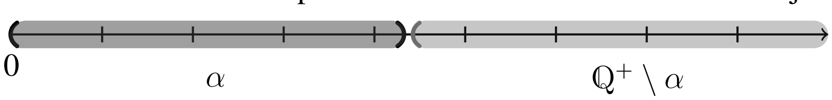
(D0) $\alpha \neq \emptyset$ und $\alpha \neq \mathbb{Q}^+$.

(D1) Falls $p \in \alpha$ und $q \in \mathbb{Q}^+$ mit $q < p$, so folgt $q \in \alpha$ (α ist *nach unten abgeschlossen*).

(D2) Für jedes $p \in \alpha$ existiert ein $q \in \alpha$ mit $p < q$ (α enthält kein *maximales Element*).

Offensichtlich sind Dedekind'sche Schnitte nach oben beschränkt: Falls α ein Dedekind'scher Schnitt ist, so existiert wegen (D0) eine Zahl $p \in \mathbb{Q}^+ \setminus \alpha$. Damit ist aber p eine obere Schranke von α, denn wäre $q \in \alpha$ mit $q > p$, so wäre aufgrund von (D1) auch $p \in \alpha$, ein Widerspruch.

Ein Dedekind'scher Schnitt α teilt die positiven rationalen Zahlen in zwei disjunkte Stücke:



Wir definieren nun die *positiven reellen Zahlen* als Menge aller Dedekind'schen Schnitte:

$$\mathbb{R}^+ := \{\alpha \subseteq \mathbb{Q}^+ : \alpha \text{ ist ein Dedekindscher Schnitt}\}.$$

Die reellen Zahlen sollen aber die rationalen Zahlen erweitern; diese lassen sich jedoch in natürlicher Weise als Dedekind'sche Schnitte darstellen: Für positive rationale Zahlen $p \in \mathbb{Q}^+$ definieren wir

$$\alpha_p := \{q \in \mathbb{Q}^+ : q < p\}.$$

Dann ist α_p ein Dedekind'scher Schnitt. Um dies zu sehen, müssen wir (D0) – (D2) nachprüfen: (D0) ist offensichtlich. Für (D1) sei $q \in \alpha_p$ und $r \in \mathbb{Q}^+$ mit $r < q$. Da $q < p$, folgt auch $r < p$

und somit $r \in \alpha_p$. Für (D2) sei $q \in \alpha_p$. Somit gilt $q < p$ und für $r := \frac{p+q}{2}$ folgt $r \in \mathbb{Q}^+$, $q < r < p$ und $r \in \alpha_p$.

Für positive rationale Zahlen $p \in \mathbb{Q}^+$ identifizieren wir p mit α_p und erhalten so eine *Einbettung* $\mathbb{Q}^+ \hookrightarrow \mathbb{R}^+$ (ähnlich wie wir auch eine Einbettung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ haben). Es gibt nun aber auch Dedekind'sche Schnitte, die eine "Lücke" in den rationalen Zahlen darstellen. Solche Lücken heissen *irrationale* Zahlen. Zum Beispiel stellt der Dedekind'sche Schnitt

$$\alpha := \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 < 2\}$$

eine solche Lücke dar. Üblicherweise wird dies implizit mit der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahlen bewiesen, was wir aber erst später zeigen werden. Der folgende indirekte Beweis stammt aus Dedekinds Schrift *Stetigkeit und irrationale Zahlen*: Wir müssen zeigen, dass es keine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ gibt mit $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ existieren mit $\frac{p^2}{q^2} = 2$. Es gibt also positive Zahlen $p, q \in \mathbb{N}$ welche die Gleichung

$$p^2 - 2q^2 = 0$$

erfüllen, woraus $q < p$ und $p < 2q^2$ folgt. Wir dürfen annehmen, dass q die kleinste Zahl ist, welche die Eigenschaft besitzt, dass ihr Quadrat durch Multiplikation mit 2 eine Quadratzahl ist. Setzen wir $\bar{q} := p - q$ und $\bar{p} := 2q - p$, so folgt aus $q < p$ und $\frac{p}{q} < 2$, dass gilt $q < p < 2q$ und $0 < \bar{q} < q$. Mit der Voraussetzung $p^2 - 2q^2 = 0$ erhalten wir

$$\bar{p}^2 - 2\bar{q}^2 = 4q^2 - 4pq + p^2 - 2(p^2 - 2pq + q^2) = -p^2 + 2q^2 = 0$$

und weil $0 < \bar{q} < q$ ist, widerspricht dies der Minimalität von q.

Es stellt sich nun die Frage, wie sich Dedekind'sche Schnitte addieren und multiplizieren lassen. Die Antwort auf diese Frage ist sehr einfach: Man betrachtet einfach die Menge, die dadurch entsteht, dass man alle Elemente des einen Schnittes mit allen Elementen des anderen Schnittes addiert bzw. multipliziert.

Für Dedekind'sche Schnitte $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ definieren wir:

$$\alpha + \beta := \big\{p + q : p \in \alpha \wedge q \in \beta\big\}$$

$$\alpha \cdot \beta := \big\{p \cdot q : p \in \alpha \wedge q \in \beta\big\}$$

LEMMA 4.1. *Seien α, β Dedekind'sche Schnitte. Dann sind $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ ebenfalls Dedekind'sche Schnitte.*

Beweis. Wir zeigen nur, dass $\alpha + \beta$ ein Dedekind'scher Schnitt ist; der Beweis, dass auch $\alpha \cdot \beta$ ein Dedekind'scher Schnitt ist, ist analog.

(D0) Da $\alpha, \beta \neq \emptyset$, gibt es $p \in \alpha$ und $q \in \beta$. Somit folgt $p + q \in \alpha + \beta$. Da $\alpha, \beta \neq \mathbb{Q}^+$, gibt es $r \in \mathbb{Q}^+ \setminus \alpha$ und $s \in \mathbb{Q}^+ \setminus \beta$. Für $p \in \alpha$ und $q \in \beta$ ist $p < r$ und $q < s$, also ist $p + q < r + s$, woraus folgt $r + s \notin \alpha + \beta$, d.h. $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}^+$.

(D1) Sei $r \in \alpha + \beta$ und $s \in \mathbb{Q}^+$ mit $s < r$. Es gibt $p \in \alpha, q \in \beta$ mit $r = p + q$. Also gilt $s < p + q$ und somit $s - q < p$. Ist $s \leq p, q$, so folgt aus (D1) für α und β, $s \in \alpha$ und $s \in \beta$. Insbesondere ist dann

$$s = \underbrace{\frac{s}{2}}_{\in \alpha} + \underbrace{\frac{s}{2}}_{\in \beta} \in \alpha + \beta$$

wie gewünscht. Sei nun $s \nleq p, q$, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $s > q$. Aus (D1) für α und $s < p + q$ folgt $s - q < p$, also $s - q \in \alpha$. Somit ist

$$s = \underbrace{s - q}_{\in\alpha} + \underbrace{q}_{\in\beta} \in \alpha + \beta.$$

(D2) Sei $r = p + q \in \alpha + \beta$ mit $p \in \alpha$ und $q \in \beta$. Gemäss (D2) für α gibt es ein $p' \in \alpha$ mit $p < p'$. Somit ist $r = p + q < p' + q$ und $p' + q \in \alpha + \beta$.

$\dashv$

In *Stetigkeit und irrationale Zahlen* schreibt Richard Dedekind: *"Ebenso wie die Addition lassen sich auch die übrigen Operationen der sogenannten Elementar-Arithmetik definieren, nämlich die Bildung der Differenzen, Produkte, Quotienten, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, und man gelangt auf diese Weise zu wirklichen Beweisen von Sätzen (wie z. B. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$), welche meines Wissens bisher nie bewiesen sind."*

Als Beispiel für die Multiplikation zweier Dedekind'scher Schnitte beweisen wir nun die Gleichung $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$, d.h. für $\alpha = \{p \in \mathbb{Q}^+ : p^2 < 2\}$ und $\beta = \{q \in \mathbb{Q}^+ : q^2 < 3\}$ ist

$$\alpha \cdot \beta = \{r \in \mathbb{Q}^+ : r^2 < 6\}.$$

Beachte zuerst, dass für rationale Zahlen $\frac{s}{t} \in \alpha$ und $\frac{u}{v} \in \beta$ stets $\frac{s^2}{t^2} \cdot \frac{u^2}{v^2} < 6$ gilt. Sei nun $r \in \mathbb{Q}^+$ mit $r^2 < 6$. Wir müssen rationale Zahlen $\frac{s}{t} \in \alpha$ und $\frac{u}{v} \in \beta$ finden, sodass $r^2 < \frac{s^2}{t^2} \cdot \frac{u^2}{v^2}$. Sei $n \in \mathbb{N}$, sodass $6 - r^2 > \frac{1}{n}$, und sei $m \in \mathbb{N}$, sodass $m > 22n$. Dann ist

$$\frac{1}{n} > \frac{22}{m} > \frac{22 - \frac{20}{m}}{m} = \frac{22m-20}{m^2} = \frac{10m+12m-20}{m^2}$$

und es gilt

$$\left(2 - \frac{4}{m}\right) \cdot \left(3 - \frac{5}{m}\right) = 6 - \frac{10m+12m-20}{m^2} > 6 - \frac{1}{n} > r^2.$$

Sei $k \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $\left(\frac{k+1}{m}\right)^2 \geq 2 > \left(\frac{k}{m}\right)^2$, dann gilt

$$2 - \frac{k^2}{m^2} \leq \left(\frac{k+1}{m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = \frac{2k+1}{m^2}$$

und weil $k < \frac{3m}{2}$ (denn $\frac{9}{4} > 2$), erhalten wir

$$2 - \frac{k^2}{m^2} < \frac{3m+1}{m^2} = \frac{m\left(3 + \frac{1}{m}\right)}{m^2} < \frac{4}{m}.$$

Analog sei $l \in \mathbb{N}$ so, dass gilt $\left(\frac{l+1}{m}\right)^2 \geq 3 > \left(\frac{l}{m}\right)^2$, dann gilt wieder $3 - \frac{l^2}{m^2} \leq \frac{2l+1}{m^2}$ und weil $l < 2m$ (denn $4 > 3$), erhalten wir

$$3 - \frac{l^2}{m^2} < \frac{4m+1}{m^2} = \frac{m\left(4 + \frac{1}{m}\right)}{m^2} < \frac{5}{m}.$$

Schliesslich sei $p := 2 - \frac{4}{m}$ und $q := 3 - \frac{5}{m}$. Dann ist

$$0 < p < \frac{k^2}{m^2} < 2 \quad \text{und} \quad 0 < q < \frac{l^2}{m^2} < 3.$$

Insbesondere ist $\frac{k}{m} \in \alpha$ und $\frac{l}{m} \in \beta$, und mit obiger Ungleichung gilt

$$r^2 < 6 - \frac{1}{n} < p \cdot q < \frac{l^2}{m^2} \cdot \frac{k^2}{m^2} < 6$$

womit $\frac{k}{m}$ und $\frac{l}{m}$ die gesuchten Zahlen sind.

Wir können analog die Konstruktion auch auf die negativen Zahlen ausweiten. Damit lässt sich leicht zeigen, dass die so konstruierten reellen Zahlen wie gewünscht die Körperaxiome erfüllen. Etwas formaler ausgedrückt haben wir das Modell $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}, \mathtt{0}, \mathtt{1}, +, \cdot)$ der rationalen Zahlen zu einem Modell $(\mathbb{R}, \mathtt{0}, \mathtt{1}, +, \cdot)$ erweitert. Was noch fehlt, ist die Ordnungsstruktur der reellen Zahlen und wir müssen auch zeigen, dass das Axiom R_{17} erfüllt ist.

Für Dedekind'sche Schnitte α und β definieren wir:

$$\alpha < \beta :\Longleftrightarrow \alpha \subsetneq \beta.$$

Weil $\mathbb{Q} \models \mathsf{DLO}$ folgt aus der Definition der Dedekind'schen Schnitte leicht, dass $<$ eine (strikte) lineare Ordnungsrelation ist, und weil $\mathbb{Q} \models \mathsf{DLO} + \mathsf{R}_{15} + \mathsf{R}_{16}$ gilt, folgt (wieder aus der Definition der Dedekind'schen Schnitte), dass die Axiome $\mathsf{DLO} + \mathsf{R}_{15} + \mathsf{R}_{16}$ auch in $\mathbb{R} = (\mathbb{R}, \mathtt{0}, \mathtt{1}, +, \cdot, <)$ erfüllt sind. Es bleibt also nur noch $\mathbb{R} \models \mathsf{R}_{17}$ zu zeigen. Mit anderen Worten, wir müssen zeigen, dass in $\mathbb{R}$ jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt:

THEOREM 4.2. *Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind vollständig, d.h. jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ besitzt ein Supremum.*

Beweis. Wir beschränken uns auch hier der Einfachheit halber auf die positiven reellen Zahlen. Sei $X \neq \emptyset$ eine nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}^+$, d.h. die Elemente $\alpha \in X$ sind Dedekind'sche Schnitte der Form $\alpha \subseteq \mathbb{Q}^+$. Wir setzen

$$\beta := \bigcup_{\alpha \in X} \alpha = \big\{p \in \mathbb{Q}^+ : \exists \alpha \in X\ (p \in \alpha)\big\}.$$

Wir zeigen zuerst, dass β ein Dedekind'scher Schnitt ist.

(D0) Offensichtlich gilt $\beta \neq \emptyset$, da $X \neq \emptyset$. Wir zeigen noch, dass $\beta \neq \mathbb{Q}^+$. Da X nach oben beschränkt ist, gibt es eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}^+$ mit $p < q$ für alle $p \in \beta$. Somit ist $q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \beta$.

(D1) Sei $p \in \beta$ und $q \in \mathbb{Q}^+$ mit $q < p$. Dann gibt es ein $\alpha \in X$ mit $p \in \alpha$, und da α (D1) erfüllt, folgt $q \in \alpha \subseteq \beta$.

(D2) Sei $p \in \beta$. Dann gibt es ein $\alpha \in X$ mit $p \in \alpha$. Da α kein maximales Element besitzt, gibt es ein $q \in \alpha$ mit $p < q$. Da $\alpha \subseteq \beta$, folgt $q \in \beta$.

Somit ist also $\beta \in \mathbb{R}^+$. Da nun $\alpha \subseteq \beta$ (d.h. $\alpha \leq \beta$) für alle $\alpha \in X$, ist β eine obere Schranke von X. Es bleibt noch zu zeigen, dass β die kleinste obere Schranke von X ist. Sei $\gamma \in \mathbb{R}^+$ beliebig mit $\gamma < \beta$. Dann gibt es ein $p \in \beta \setminus \gamma$, und nach Definition von β existiert ein $\alpha \in X$ mit $p \in \alpha$. Daraus folgt $\gamma < \alpha$, und weil $\alpha \in X$, kann γ keine obere Schranke von X sein. Also ist β die kleinste obere Schranke von X. $\dashv$

Es stellt sich die Frage, ob es auch andere Modelle der reellen Zahlen gibt, oder ob zumindest alle Modelle der reellen Zahlen isomorph zueinander sind. Obwohl dies manchmal sogar "bewiesen" wird, ist die Aussage nicht ganz richtig. Genau genommen haben wir nämlich das Modell $\mathbb{R}$ in einem Modell von ZF konstruiert, d.h. die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist nicht "absolut" sondern hängt vom zugrunde gelegten Modell von ZF ab, in dem $\mathbb{R}$ konstruiert wurde. Insbesondere hängt die Grösse der Menge $\mathbb{R}$ davon ab, wie gross die Menge $\mathscr{P}(\omega)$ im zugrunde gelegten Modell von ZF ist, was aber von ZF unabhängig ist, d.h. von ZF nicht entschieden wird.

INTERVALLSCHACHTELUNGEN

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen ist von fundamentaler Bedeutung für die Grundlagen der Analysis. Zum Beispiel lassen sich damit der Satz von Bolzano-Weierstraß oder der Zwischenwertsatz beweisen.

Eine wichtige Folgerung aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen ist der folgende Satz, für den wir zuerst den Begriff der *Intervallschachtelung* definieren: Eine **Intervallschachtelung** ist eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von nicht-leeren abgeschlossenen Intervallen $I_n = [x_n, y_n]$ mit der Eigenschaft

$$I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$$

und $\lim\limits_{n\to\infty} (y_n - x_n) = 0$.

THEOREM 4.3. *Sei* $((I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Intervallschachtelung mit* $I_n = [x_n, y_n]$. *Dann gibt es genau eine reelle Zahl* x *mit* $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$.

Beweis. Aufgrund der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ gibt es Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \sup\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{und} \quad y = \inf\{y_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Somit gilt

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x \leq y \leq \dots \leq y_2 \leq y_1 \leq y_0$$

und somit $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Es bleibt zu zeigen, dass $x = y$. Wäre $x < y$, so wäre $\varepsilon := y - x > 0$. Nach Annahme gibt es aber ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $y_n - x_n < \varepsilon$ und damit $y - x \leq y_n - x_n < \varepsilon$, was aber ein Widerspruch ist zur Definition von x und y. ⊣

Es sei erwähnt, dass sich mit Hilfe von Theorem 4.3 die reellen Zahlen auch als Äquivalenzklassen von *Cauchy-Folgen* konstruieren lassen.