6. KARDINALZAHLEN

VERGLEICHE VON MÄCHTIGKEITEN IN ZF

Zwei Mengen A und B haben dieselbe **Mächtigkeit**, bezeichnet mit $|A| = |B|$, falls es eine Bijektion zwischen A und B gibt. Zum Beispiel haben $\omega + \omega$ und ω dieselbe Mächtigkeit, denn die Funktion $f : \omega + \omega \to \omega$ definiert durch

$$f(\alpha) = \begin{cases} \beta + \beta & \text{für } \alpha = \omega + \beta, \\ \alpha + \alpha + 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ist eine Bijektion zwischen $\omega + \omega$ und ω. Weil die Verknüpfung von Bijektionen wieder eine Bijektion ist, ist die Gleichheit von Mächtigkeiten eine Äquivalenzrelation.

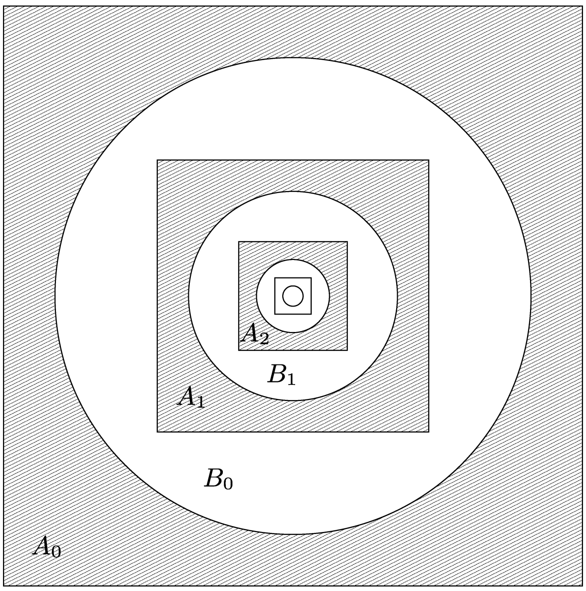
Gilt $|A| = |B'|$ für $B' \subseteq B$, dann ist die Mächtigkeit von A kleiner oder gleich der Mächtigkeit von B, bezeichnet mit $|A| \leq |B|$. Beachte, dass $|A| \leq |B|$ genau dann gilt, wenn es eine Injektion von A in B gibt. Falls $|A| \leq |B|$ und $|A| \neq |B|$ gilt, dann ist die Mächtigkeit von A strikt kleiner als die Mächtigkeit von B, bezeichnet mit $|A| < |B|$. Beachte, dass die Relation $\leq$ reflexiv und transitiv ist. Der folgende Satz sagt nun, dass die Relation $\leq$ auch anti-symmetrisch ist.

CANTOR-BERNSTEIN THEOREM. *Sind A und B zwei Mengen mit $|A| \leq |B|$ und $|B| \leq |A|$, dann gilt $|A| = |B|$.*

Beweis. Seien A und B zwei Mengen und seien $f : A \hookrightarrow B$ und $g : B \hookrightarrow A$ zwei Injektionen. Weiter sei $A_0 := A$, $B_0 := g[B]$ und für $n \in \omega$ sei

$$A_{n+1} := (g \circ f)[A_n], \quad B_{n+1} := (g \circ f)[B_n] \quad \text{und} \quad D := \bigcap_{n \in \omega} A_n.$$

Die folgende Graphik soll diese Definitionen veranschaulichen:



Weil f und g injektiv sind, sind auch $g \circ f$ und $f \circ g$ injektiv. Damit gilt für alle $n \in \omega$, dass $g \circ f$ eine Bijektion zwischen A_n und A_{n+1} ist, und dass $f \circ g$ eine Bijektion zwischen B_n und B_{n+1} ist. Weiter folgt aus $(g \circ f)[A_n] \subseteq B_n \subseteq A_n$ (für alle $n \in \omega$) die Gleichheit $D = \bigcap_{n \in \omega} B_n$.

Aus den obigen Beobachtungen folgt, dass die Mengen A_n und B_n die folgenden Eigenschaften haben:

(a) $A_0 = D \cup (A_0 \setminus B_0) \cup (B_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus A_2) \cup \dots$

(b) $B_0 = D \cup (B_0 \setminus A_1) \cup (A_1 \setminus B_1) \cup (B_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus B_2) \cup \dots$

(c) Für alle $n \in \omega$ gilt, $|A_n \setminus B_n| = |A_{n+1} \setminus B_{n+1}|$.

Zum Beispiel folgt (c) mit den Bijektionen zwischen A_n und A_{n+1}, bzw. B_n und B_{n+1}. Weil nun für alle $n \in \omega$, die Mengen $(A_n \setminus B_n)$, $(B_n \setminus A_{n+1})$ und D paarweise disjunkt sind, können wir in der Darstellung von B_0 mit der Eigenschaft (c) die Mengen $A_{n+1} \setminus B_{n+1}$ bijektiv auf die Mengen $A_n \setminus B_n$ abbilden. Dadurch erhalten wir die Darstellung von A_0 in (a) und somit ist $|A_0| = |B_0|$. ⊣

Als eine erste Anwendung des CANTOR-BERNSTEIN THEOREMs zeigen wir, dass die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dieselbe Mächtigkeit hat wie ω.

PROPOSITION 6.1. $|\mathbb{Q}| = |\omega|$

Beweis. $|\mathbb{Q}| \leq |\omega|$: Wir definieren $f : \mathbb{Q} \to \omega$ durch

$$f\left(\frac{p}{q}\right) := \begin{cases} 0 & \text{für } p = 0, \\ 2^p \cdot 3^q & \text{für } p, q > 0 \text{ und } \mathrm{ggT}(p,q) = 1, \\ 2^p \cdot 5^{|q|} & \text{für } p > 0,\, q < 0 \text{ und } \mathrm{ggT}(p,q) = 1, \end{cases}$$

dann ist f injektiv (wobei wir hier implizit die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung annehmen, welche wir später beweisen).

$|\omega| \leq |\mathbb{Q}|$: Offensichtlich ist die identische Abbildung $\omega \to \mathbb{Q}$ eine Injektion.

Mit dem CANTOR-BERNSTEIN THEOREM erhalten wir somit $|\mathbb{Q}| = |\omega|$. ⊣

Als eine weitere Anwendung des CANTOR-BERNSTEIN THEOREMs zeigen wir, dass die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ dieselbe Mächtigkeit hat wie $\mathscr{P}(\omega)$.

PROPOSITION 6.2. $|\mathbb{R}| = |\mathscr{P}(\omega)|$

Beweis. $|\mathbb{R}| \leq |\mathscr{P}(\omega)|$: Mit Proposition 6.1 haben wir $|\mathbb{Q}| = |\omega|$ und mit der Konstruktion der reellen Zahlen als Dedekind'sche Schnitte erhalten wir $|\mathbb{R}| \leq |\mathscr{P}(\mathbb{Q})|$, also gilt $|\mathbb{R}| \leq |\mathscr{P}(\omega)|$.

$|\mathscr{P}(\omega)| \leq |\mathbb{R}|$: Wir definieren $f : \mathscr{P}(\omega) \to \mathbb{R}$ durch $f(\emptyset) := 0$ und für $x \subseteq \omega$, $x \neq \emptyset$ sei

$$f(x) := \sum_{n \in x} \frac{1}{3^n}.$$

Dann ist – unter Verwendung der eindeutigen Darstellung der aus den Ziffern 0 und 1 gebildeten triadischen Zahlen – f injektiv und es gilt $|\mathscr{P}(\omega)| \leq |\mathbb{R}|$.

Mit dem CANTOR-BERNSTEIN THEOREM erhalten wir somit $|\mathbb{R}| = |\mathscr{P}(\omega)|$. ⊣

Eine wichtige Erkenntnis von Georg Cantor, dem Begründer der Mengenlehre, war, dass es beliebig grosse Mächtigkeiten gibt.

SATZ VON CANTOR. *Für jede Menge M ist $|M| < |\mathscr{P}(M)|$.*

Beweis. Ist $M = \emptyset$, so ist $\mathscr{P}(M) = \{\emptyset\}$ und wir erhalten $|M| < |\mathscr{P}(M)|$. Sei also $M \neq \emptyset$. Dann ist

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \longrightarrow & \mathscr{P}(M) \\ & x & \longmapsto & \{x\} \end{array}$$

eine Injektion und es gilt $|M| \leq |\mathscr{P}(M)|$. Um $|M| \neq |\mathscr{P}(M)|$ zu zeigen sei $g : M \to \mathscr{P}(M)$ irgend eine Funktion. Dann ist

$$\Gamma := \big\{x \in M : x \notin g(x)\big\}$$

eine Teilmenge von M, also $\Gamma \in \mathscr{P}(M)$. Wäre g eine Bijektion, dann wäre g auch eine Surjektion, d.h. es existiert ein $x_0 \in M$ mit $g(x_0) = \Gamma$. Nun gilt aber

$$x_0 \in \Gamma \iff x_0 \notin g(x_0) \iff x_0 \notin \Gamma$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist. Somit ist g nicht surjektiv, also auch nicht bijektiv, und weil g beliebig war, gilt $|M| \neq |\mathscr{P}(M)|$. $\dashv$

KARDINALZAHLEN IN ZFC

Mit dem Wohlordnungsprinzip (bzw. dem Auswahlaxiom) kann jede Menge wohlgeordnet werden. Es gilt sogar, dass jede Menge bijektiv auf eine Ordinalzahl abgebildet werden kann. Insbesondere gibt es zu jeder Menge M eine Ordinalzahl $\alpha \in \Omega$ mit $|M| = |\alpha|$. Die **Kardinalität** einer Menge M, bezeichnet mit $|M|$, ist definiert als die kleinste Ordinalzahl α_0, sodass eine Bijektion zwischen α_0 und M existiert, d.h. $|\alpha_0| = |M|$. Formal lässt sich die Ordinalzahl $|M|$ wie folgt definieren:

$$|M| := \bigcap \big\{\alpha \in \Omega : \exists f \in {}^{\alpha}M \,(f \text{ ist bijektiv})\big\}$$

wobei noch zu beweisen wäre, dass $\big\{\alpha \in \Omega : |\alpha| = |M|\big\}$ eine Menge ist. Nach Definition ist $|M|$ also immer eine Ordinalzahl.

Ist $\alpha = |M|$ für eine Menge M, so ist α eine **Kardinalzahl**. Für Kardinalzahlen κ gilt also $\kappa = |\kappa|$. Zum Beispiel sind die Elemente aus ω, wie auch ω selber, Kardinalzahlen, hingegen sind $\omega + 1$ oder $\omega \cdot \omega$ keine Kardinalzahlen, denn es gilt $|\omega + 1| = |\omega \cdot \omega| = \omega$.

Weil Kardinalzahlen immer auch Ordinalzahlen sind, sind diese, wie die Ordinalzahlen, wohlgeordnet (durch $\in$).

Die Ordinalzahl ω ist die kleinste unendliche Kardinalzahl – manchmal schreibt man für Kardinalzahl ω auch ω_0. Die kleinste Kardinalzahl, welche grösser als ω ist, wird mit ω_1 bezeichnet. Die Kardinalzahl ω_1 ist also die kleinste überabzählbare Ordinalzahl. Analog ist ω_2 die kleinste Kardinalzahl, welche grösser als ω_1 ist, etc. Weiter ist zum Beispiel ω_ω die ω-te unendliche Kardinalzahl, ω_{ω_1} ist die ω_1-te unendliche Kardinalzahl und allgemein ist für $\alpha \in \Omega$, ω_α die α-te unendliche Kardinalzahl. Um Kardinalzahlen besser von Ordinalzahlen unterscheiden zu können, schreibt man oft $\aleph_\alpha$ anstelle von ω_α – wobei $\aleph$, genannt "Aleph", der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets ist.

Für Kardinalzahlen $\kappa \in \Omega$ gilt immer $\kappa \in \omega$ oder κ ist eine Limesordinalzahl: Ist $\kappa \notin \omega$, so ist entweder $\omega = \kappa$ (also κ Limesordinalzahl) oder $\omega \in \kappa$. Wäre nun $\kappa = \alpha + 1$ für ein $\alpha \in \Omega$

(d.h. κ Nachfolgerordinalzahl), so wäre $f : \alpha + 1 \to \alpha$ mit

$$f(\beta) := \begin{cases} 0 & \text{für } \beta = \alpha, \\ \beta + 1 & \text{für } \beta \in \omega, \\ \beta & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Bijektion zwischen κ und α, d.h. $|\alpha| = |\kappa|$. Aus $\alpha < \kappa$ erhalten wir $|\kappa| < \kappa$, also ist κ keine Kardinalzahl.

DIE KONTINUUMSHYPOTHESE

Mit dem SATZ VON CANTOR ist $\omega < |\mathscr{P}(\omega)|$ und mit Proposition 6.2 haben wir $|\mathscr{P}(\omega)| = |\mathbb{R}|$. Die Frage stellt sich nun, wie gross $\mathfrak{c} := |\mathbb{R}|$ ist ($\mathfrak{c}$ steht für die Kardinalität des Kontinuums). Cantors **Kontinuumshypothese** CH besagt nun, dass $\mathfrak{c}$ die kleinste Kardinalzahl grösser als ω ist, d.h. CH ist die Aussage $\mathfrak{c} = \omega_1$. Mit der Forcing-Technik von Cohen lässt sich zeigen, dass CH unabhängig ist von ZFC, d.h. es gibt Modelle von ZFC in denen CH gilt, und es gibt solche, in denen CH nicht gilt. Bei den letzteren Modellen hat man gewisse Freiheiten, wie gross $\mathfrak{c}$ sein kann. Zum Beispiel ist $\mathfrak{c} = \omega_{23}$, $\mathfrak{c} = \omega_{\omega+1}$, oder $\mathfrak{c} = \omega_{\omega_1}$ jeweils konsistent mit ZFC, aber zum Beispiel ist $\mathfrak{c} = \omega_\omega$ oder auch $\mathfrak{c} = \omega_{\omega_\omega}$ nicht konsistent mit ZFC.

Gilt CH, so existiert eine Bijektion $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$. Für jedes $\alpha \in \omega_1$ ist also $r_\alpha := f(\alpha)$ eine reelle Zahl, und weil ω_1 die kleinste überabzählbare Kardinalzahl ist, ist für jedes $\alpha \in \omega_1$ die Menge $\{r_\beta : \beta \in \alpha\} \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar.

KARDINALZAHLARITHMETIK

Für beliebige Kardinalzahlen κ und λ definieren wir:

$$\kappa + \lambda := \big|(\kappa \times \{0\}) \cup (\lambda \times \{1\})\big|, \qquad \kappa \cdot \lambda := |\kappa \times \lambda|, \qquad \kappa^\lambda := \big|{}^\lambda\kappa\big|.$$

Weil für alle Mengen A gilt $|{}^A 2| = |\mathscr{P}(A)|$, wird die Kardinalität der Potenzmenge einer Kardinalzahl κ üblicherweise mit 2^κ bezeichnet. Insbesondere ist $\mathfrak{c} = 2^\omega$, weil $\mathfrak{c} = |\mathscr{P}(\omega)|$. Beachte, dass mit dem SATZ VON CANTOR für alle Kardinalzahlen κ gilt $\kappa < 2^\kappa$.

Für das Rechnen mit Kardinalzahlen gelten dieselben Gesetze wie für natürliche Zahlen. Insbesondere gelten für Potenzen von Kardinalzahlen die Potenzgesetze.

PROPOSITION 6.3. *Die Addition und Multiplikation von Kardinalzahlen ist assoziativ und kommutativ und es gilt das Distributivgesetz für die Multiplikation über der Addition. Weiter haben wir für alle Kardinalzahlen κ, λ, μ*

$$\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu, \quad \kappa^{\mu\cdot\lambda} = (\kappa^\lambda)^\mu, \quad (\kappa\cdot\lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu.$$

Beweis. Aus den obigen Definitionen folgt sofort, dass die Addition und Multiplikation von Kardinalzahlen assoziativ und kommutativ ist und das Distributivgesetz gilt. Um die Potenzgesetze nachzuweisen, seien κ, λ, μ beliebige Kardinalzahlen.

Für jede Funktion $f : (\lambda \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\}) \to \kappa$ seien die Funktionen $f_\lambda : (\lambda \times \{0\}) \to \kappa$ und $f_\mu : (\mu \times \{1\}) \to \kappa$ so, dass für jedes $x \in (\lambda \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\})$,

$$f(x) = \begin{cases} f_\lambda(x) & \text{falls } x \in \lambda \times \{0\}, \\ f_\mu(x) & \text{falls } x \in \mu \times \{1\}. \end{cases}$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass jeder Funktion $f : (\lambda\times\{0\}) \cup (\mu\times\{1\}) \to \kappa$ genau ein Paar von Funktionen $\langle f_\lambda, f_\mu\rangle$ entspricht, und dass umgekehrt jedes Paar von Funktionen $\langle f_\lambda, f_\mu\rangle$ genau eine Funktion $f : (\lambda \times \{0\}) \cup (\mu \times \{1\}) \to \kappa$ definiert. Somit haben wir eine Bijektion zwischen $\kappa^{\lambda+\mu}$ und $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.

Für jede Funktion $f : \mu \to {}^\lambda\kappa$, sei $\tilde{f} : \mu \times \lambda \to \kappa$ so, dass für alle $\alpha \in \mu$ und alle $\beta \in \lambda$ gilt

$$\tilde{f}\big(\langle \alpha, \beta \rangle\big) = f(\alpha)(\beta).$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}^\mu\big({}^\lambda\kappa\big) & \longrightarrow & {}^{\mu\times\lambda}\kappa \\ f & \longmapsto & \tilde{f} \end{array}$$

bijektiv ist, und somit haben wir auch $\kappa^{\mu\cdot\lambda} = (\kappa^\lambda)^\mu$ gezeigt.

Für jede Funktion $f : \mu \to \kappa \times \lambda$ seien die Funktionen $f_\kappa : \mu \to \kappa$ und $f_\lambda : \mu \to \lambda$ so, dass für jedes $\alpha \in \mu$ gilt $f(\alpha) = \langle f_\kappa(\alpha), f_\lambda(\alpha) \rangle$. Es ist wieder leicht nachzuprüfen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}^\mu(\kappa \times \lambda) & \longrightarrow & {}^\mu\kappa \times {}^\mu\lambda \\ f & \longmapsto & \langle f_\kappa, f_\lambda \rangle \end{array}$$

bijektiv ist, und somit haben wir auch die Gleichung $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$ gezeigt. $\dashv$

Das nächste Resultat zeigt, dass die Addition und Multiplikation von Kardinalzahlen sehr einfach ist.

THEOREM 6.4. *Für alle Ordinalzahlen $\alpha, \beta \in \Omega$ gilt*

$$\omega_\alpha + \omega_\beta = \omega_\alpha \cdot \omega_\beta = \omega_{\alpha\cup\beta} = \max\{\omega_\alpha, \omega_\beta\}.$$

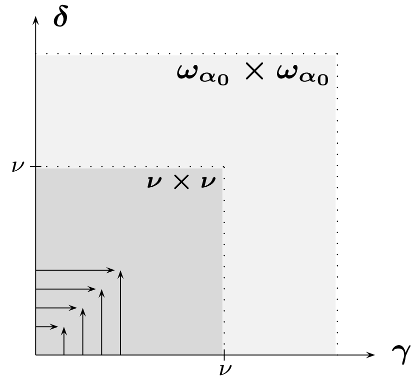
Insbesondere gilt für jede unendliche Kardinalzahl κ, $\kappa^2 = \kappa$.

Beweis. Weil die Kardinalzahlen linear geordnet sind, genügt es zu zeigen, dass für alle $\alpha \in \Omega$ gilt $\omega_\alpha \cdot \omega_\alpha = \omega_\alpha$.

Für $\alpha = 0$ wissen wir bereits, dass $|\omega \times \omega| = \omega$ gilt, und somit haben wir $\omega_0 \cdot \omega_0 = \omega_0$. Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass ein $\alpha \in \Omega$ existiert, sodass $\omega_\alpha \cdot \omega_\alpha > \omega_\alpha$. Weil die Ordinalzahlen wohlgeordnet sind, existiert eine kleinste Ordinalzahl α_0 mit dieser Eigenschaft, d.h. $\omega_{\alpha_0} \cdot \omega_{\alpha_0} > \omega_{\alpha_0}$ und für alle $\beta \in \alpha_0$ ist $\omega_\beta \cdot \omega_\beta = \omega_\beta$. Auf der Menge $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ definieren wir die Ordnungsrelation $\prec$ durch

$$\langle \gamma_1, \delta_1 \rangle \prec \langle \gamma_2, \delta_2 \rangle \quad \iff \quad \begin{cases} \max\{\gamma_1, \delta_1\} < \max\{\gamma_2, \delta_2\}, \text{ oder} \\ \max\{\gamma_1, \delta_1\} = \max\{\gamma_2, \delta_2\} \wedge \gamma_1 < \gamma_2, \text{ oder} \\ \max\{\gamma_1, \delta_1\} = \max\{\gamma_2, \delta_2\} \wedge \gamma_1 = \gamma_2 \wedge \delta_1 < \delta_2. \end{cases}$$

Die folgende Graphik soll die Ordnungstruktur von $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ (bzgl. $\prec$) veranschaulichen:



Bezüglich der Ordnungsrelation $\prec$ sind die kleinsten Elemente von $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$

$$\langle 0,0\rangle \prec \langle 0,1\rangle \prec \langle 1,0\rangle \prec \langle 1,1\rangle \prec \langle 0,2\rangle \prec \langle 1,2\rangle \prec \langle 2,0\rangle \prec \langle 2,1\rangle \prec \langle 2,2\rangle \prec \langle 0,3\rangle \prec \cdots$$

und allgemein haben wir für $\alpha \in \beta \in \omega_{\alpha_0}$ immer $\langle \alpha, \beta\rangle \prec \langle \beta, \alpha\rangle$.

Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Ordnungsrelation $\prec$ eine lineare Ordnung auf $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ ist, und weil ω_{α_0} eine Ordinalzahl ist, lässt sich zeigen, dass $\prec$ sogar eine Wohlordnung auf $\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ ist: Sei $X \subseteq \omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ eine nicht-leere Menge. Aus all den Paaren $\langle \gamma, \delta\rangle \in X$ mit kleinstem $\max\{\gamma, \delta\}$ wählen wir zuerst die Paare mit der kleinsten ersten Koordinate γ_0 aus, und aus diesen Paaren wiederum das Paar mit der kleinsten zweiten Koordinate δ_0. Das Paar $\langle \gamma_0, \delta_0\rangle \in X$ ist dann das $\prec$-minimale Element von X.

Aus dem Beweis des Wohlordnungsprinzips folgt, dass es eine (und nur eine) Ordinalzahl $\eta \in \Omega$ gibt, sodass eine Bijektion $\Gamma : \eta \to \omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$ existiert mit der Eigenschaft, dass für alle $\alpha, \alpha' \in \eta$ gilt:

$$\alpha < \alpha' \iff \Gamma(\alpha) \prec \Gamma(\alpha')$$

Da mit unserer Annahme die Ungleichung $\omega_{\alpha_0} < |\omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}|$ gilt, haben wir $\omega_{\alpha_0} < |\eta|$. Sei nun

$$\langle \gamma_0, \delta_0\rangle := \Gamma(\omega_{\alpha_0}).$$

Da $\omega_{\alpha_0} \in \eta$ ist, gibt es solch ein Paar $\langle \gamma_0, \delta_0\rangle \in \omega_{\alpha_0} \times \omega_{\alpha_0}$. Insbesondere sind $\gamma_0, \delta_0 \in \omega_{\alpha_0}$, und für $\nu = \max\{\gamma_0, \delta_0\}$ haben wir

$$|\nu| < \omega_{\alpha_0} \quad \text{und} \quad \omega_{\alpha_0} \leq |\nu \times \nu|\,.$$

Schliesslich sei $\omega_\beta = |\nu|$. Dann ist $\beta < \alpha_0$ und mit der Wahl von von ω_{α_0} gilt $\omega_\beta \cdot \omega_\beta = \omega_\beta$. Andererseits ist $\omega_\beta \cdot \omega_\beta \geq \omega_{\alpha_0}$ und da $\omega_{\alpha_0} > \omega_\beta$ erhalten wir den gewünschten Widerspruch. $\dashv$

Als eine Folgerung aus Theorem 6.4 erhalten wir folgendes Resultat.

KOROLLAR 6.5. *Ist κ eine unendliche Kardinalzahl, so gilt:*

(a) *Für alle $n \in \omega$ ist $\kappa^{n+1} = \kappa$.*

(b) $\sum_{n\in\omega} \kappa^n = \kappa$

(c) $\kappa^\kappa = 2^\kappa$

Beweis. (a) Der Beweis erfolgt mittels Induktion über $n \in \omega$: Ist $n = 0$, dann gilt nach Definition $\kappa^1 = \kappa$. Ist $n = 1$, dann erhalten wir mit Theorem 6.4, $\kappa^2 = \kappa$. Sei die Aussage $\kappa^{n+1} = \kappa$ bewiesen für ein $n \in \omega$. Dann ist $\kappa^{n+2} = \kappa \cdot \kappa^{n+1}$ und mit der Voraussetzung erhalten wir $\kappa^{n+2} = \kappa \cdot \kappa$. Mit Theorem 6.4 erhalten wir schliesslich $\kappa^{n+2} = \kappa$.

(b) Mit (a) erhalten wir $\sum_{n\in\omega} \kappa^n = 1 + \kappa + \kappa^2 + \ldots + \kappa^n + \ldots = 1 + \kappa \cdot \omega = 1 + \kappa = \kappa$.

(c) Weil κ unendlich ist, gilt $\kappa^\kappa = |{}^\kappa\kappa| \geq |{}^\kappa 2| = 2^\kappa$. Andererseits ist jede Funktion $f \in {}^\kappa\kappa$ eine Teilmenge von $\kappa \times \kappa$. Somit ist $|{}^\kappa\kappa| \leq |\mathscr{P}(\kappa \times \kappa)|$ und weil $|\kappa \times \kappa| = \kappa$, erhalten wir $\kappa^\kappa \leq |\mathscr{P}(\kappa)| = 2^\kappa$. Mit dem CANTOR-BERNSTEIN THEOREM folgt somit $\kappa^\kappa = 2^\kappa$. $\dashv$

Bezüglich $\mathfrak{c}$ erhalten wir zum Beispiel $\mathfrak{c}^\mathfrak{c} = 2^\mathfrak{c}$, und weil $\mathfrak{c} = 2^\omega$, ist

$$\mathfrak{c}^\omega = \left(2^\omega\right)^\omega = 2^{\omega\cdot\omega} = 2^\omega = \mathfrak{c}.$$

Für eine unendliche Kardinalzahl κ sei $\kappa^{<\omega}$ die Kardinalität der Menge der endlichen Sequenzen die mit den Elementen von κ gebildet werden können, also

$$\kappa^{<\omega} := \left|\left\{s \in {}^n\kappa : n \in \omega\right\}\right|.$$

Mit Korollar 6.5.(b) gilt dann $\kappa^{<\omega} = \sum_{n\in\omega} \kappa^n = \kappa$. Weil nun jede endliche Teilmenge von κ nach der Grösse ihrer Elemente geordnet werden kann, folgt daraus, dass die Menge der endlichen Teilmengen einer unendlichen Kardinalzahl κ ebenfalls die Kardinalität κ hat.