7. Grundbegriffe der Graphentheorie

Knoten und Kanten

Ein **Graph** kann aufgefasst werden als eine $\mathscr{L}$-Struktur mit einem Bereich V, wobei die Signatur $\mathscr{L}$ aus einer oder mehreren binären Relationssymbolen E bzw. $E_0, \dots, E_k$ (für $k \in \omega$) besteht. Ein Graph G besteht also aus einer Menge V, den sogenannten **Knoten** (engl. *vertices*), und einer oder mehrerer Mengen $E \subseteq V \times V$ bzw. $E_0, \dots, E_k \subseteq V \times V$, den sogenannten **Kanten** (engl. *edges*). Wir schreiben also $G = (V, E)$ bzw. $G = (V, E_0, \dots, E_k)$.

xEy bzw. $\langle x, y\rangle \in E$ bedeutet, dass x und y durch eine Kante von x nach y verbunden sind; x und y heissen dann **adjazent**. Ist $G = (V, E)$ ein Graph und ist die Relation E symmetrisch, d. h. $\forall x, y \in V\,(xEy \leftrightarrow yEx)$, so ist G ein **ungerichteter** Graph, andernfalls ist G ein **gerichteter** Graph, auch **Digraph** genannt. Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, so indentifizieren wir die Kanten $\langle x, y\rangle$ und $\langle y, x\rangle$ und schreiben $\{x, y\} \in E$.

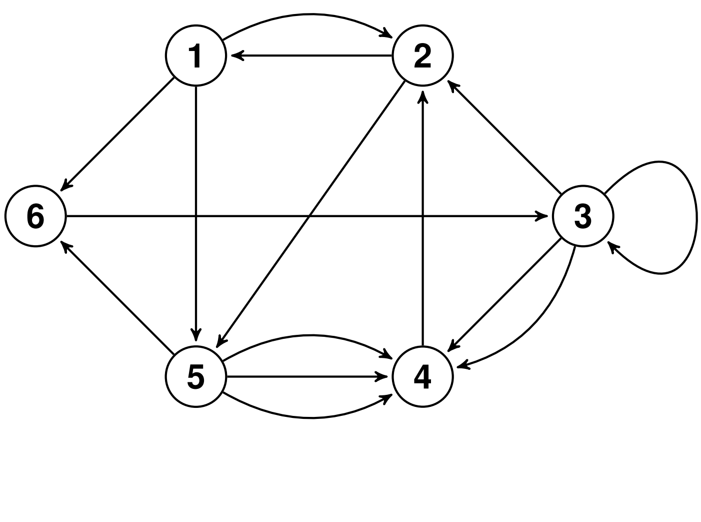
Eine Kante $\langle x, x\rangle$ heisst **Schlinge** (engl. *loop*). Ein Graph $G = (V, E)$ ist **schlingenfrei**, wenn er keine Schlingen besitzt, wenn also $\forall x \in V\,(\neg xEx)$ gilt. Wenn wir mehrere Relationen $E_0, \dots, E_k$ in $\mathscr{L}$ haben, so kann der Graph $(V, E_0, \dots, E_k)$ auch mehrere Kanten zwischen zwei Knoten x und y besitzen. Solche *Mehrfachkanten* sind verschieden, da sie zu verschiedenen Relationen E_i gehören. Ein Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten heisst **schlicht**.

Ist $G = (V, E)$ ein endlicher Graph, d. h. $V = \{v_1, \dots v_n\}$ für ein $n \in \omega$ und $E \subseteq V \times V$, so können wir den Graphen G mit einer $(n \times n)$-Matrix $A(G) = (a_{ij})$, der sogenannten **Adjazenzmatrix** von G, darstellen, welche wie folgt definiert ist:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } \langle v_i, v_j\rangle \in E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $G = (V, E_0, \dots, E_k)$ ein endlicher Graph mit Mehrfachkanten, so ist die Adjazenzmatrix $A(G)$ von G die Summe der Adjazenzmatrizen $A(G_l)$ der Graphen $G_l = (V, E_l)$, d. h. $A(G) = \sum_{l=0}^{k} A(G_l)$. Die Adjazenzmatrix $A(G)$ eines Graphen G ist genau dann symmetrisch, wenn G ein ungerichteter Graph ist.

Beispiel eines gerichteten Graphen und seiner Adjazenzmatrix:



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

GRADE

Der Grad eines Knotens $x \in V$ “misst” wie viele Kanten von x ausgehen bzw. in x zusammenkommen.

Wir definieren Grade von Knoten zuerst für Digraphen: Sei $G = (V, E)$ ein Digraph. Für $x \in V$ seien

$$\Gamma^+(x) := \big\{y \in V : \langle x, y\rangle \in E\big\} \quad \text{und} \quad \Gamma^-(x) := \big\{y \in V : \langle y, x\rangle \in E\big\}.$$

Weiter seien

$$\deg^+(x) := |\Gamma^+(x)| \quad \text{und} \quad \deg^-(x) := |\Gamma^-(x)|.$$

Für $x \in V$ heisst $\deg^+(x)$ **positiver Halbgrad** von x und $\deg^-(x)$ heisst **negativer Halbgrad** von x. Manchmal wird $\deg^+(x)$ auch mit $d_{\text{out}}(x)$ und $\deg^-(x)$ auch mit $d_{\text{in}}(x)$ bezeichnet. Schliesslich sei $\deg(x) := \deg^+(x) + \deg^-(x)$ der **Grad** von x. Beachte: Schlingen werden für den Grad doppelt gezählt.

Ist $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph, so definieren wir für $x \in V$:

$$\Gamma(x) := \big\{y \in V : \{x, y\} \in E\big\} \quad \text{und} \quad \deg(x) := |\Gamma(x)| + \big|\big\{x \in V : \{x\} \in E\big\}\big|.$$

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $\deg(x) = r$ für alle $x \in V$ heisst **regulär** vom Grad r.

Ein ungerichteter Graph heisst **vollständig**, falls für alle Knoten $x \neq y$ gilt $\{x, y\} \in E$. Der vollständige, ungerichtete, schlichte Graph mit n Knoten wird mit K_n bezeichnet. K_n ist ein regulärer Graph vom Grad $n - 1$.

TEILGRAPHEN, PFEIL- UND KANTENZÜGE

Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen mit $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$, so ist G' ein **Teilgraph** von G, geschrieben $G' \subseteq G$.

Spezialfälle

- Sei $U \subseteq V$. Der **durch *U* erzeugte** Teilgraph $G' = G_U \subseteq G$ ist definiert durch

$$V' := U \quad \text{und} \quad E' := \big\{\langle x, y\rangle \in E : \{x, y\} \subseteq U\big\}.$$

- Sei $F \subseteq E$. Der **durch *F* erzeugte** Teilgraph $G' = G_F \subseteq G$ ist definiert durch

$$V' := \bigcup \big\{\{x, y\} \subseteq V : \langle x, y\rangle \in F\big\} \quad \text{und} \quad E' := F.$$

Sei $G = (V, E)$ ein Digraph (nicht notwendigerweise schlingenfrei) und sei $H \subseteq E$ eine nicht-leere, endliche Kantenteilmenge sodass für ein $l \geq 1$ gilt:

$$|H| = l \quad \text{und} \quad H = \big\{\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{l-1}, x_l\rangle\big\}.$$

Der durch H erzeugte Teilgraph G_H heisst **Pfeilzug von $\boldsymbol{x_0}$ nach $\boldsymbol{x_l}$** der Länge l. Wir unterscheiden:

- **offener Pfeilzug**, falls $x_0 \neq x_l$
- **geschlossener Pfeilzug** falls $x_0 = x_l$,

Beachte, dass in einem Pfeilzug die Kanten paarweise verschieden sind. Falls auch die x_i paarweise verschieden sind, so heisst G_H **Bahn von $\boldsymbol{x_0}$ nach $\boldsymbol{x_l}$** der Länge l. Falls die x_i paarweise verschieden sind ausser $x_0 = x_l$, so ist G_H ein **Wirbel**.

Aus den Definitionen folgt, dass jeder offene Pfeilzug von a nach b eine Bahn von a nach b als Teilgraphen enthält, und dass jeder geschlossene Pfeilzug immer einen Wirbel als Teilgraphen enthält.

Für ungerichtete Graphen sind die Definitionen analog und wir sprechen im ungerichteten Fall von **offenen** bzw. **geschlossenen Kantenzügen** (anstelle von Pfeilzügen), sowie von **Wegen** und **Kreisen** (anstelle von Bahnen und Wirbeln).

Die Definition sind analog für Graphen mit Mehrfachkanten, wobei Mehrfachkanten wieder als verschieden betrachtet werden.

Ein Graph (gerichtet oder ungerichtet) heisst **zusammenhängend**, wenn jedes Paar von verschiedenen Knoten durch einen Weg (ungerichtet) verbunden ist.

Pfeilfolgen bestimmter Länge

Eine Folge der Länge l von Kanten $\langle x_0, x_1\rangle$, $\langle x_1, x_2\rangle$, ..., $\langle x_{l-1}, x_l\rangle$ eines Graphen $G = (V, E_0, \dots, E_k)$, in der Kanten auch mehrfach vorkommen können, nennen wir eine **Pfeilfolge von x_0 nach x_l der Länge l.**

Mit der Adjazenzmatrix eines Digraphen $G = (V, E_0, \dots, E_k)$ können wir bestimmen, wie viele verschiedene Peilfolgen einer bestimmten Länge es zwischen zwei Knoten gibt.

PROPOSITION 7.1. *Sei $G = (V, E_0, \dots, E_k)$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ein endlicher Digraph und sei A die Adjazenzmatrix von G. Sei A^k die k-te Potenz von A für ein $k \geq 1$. Ist $A^k := \left(a_{ij}^{[k]}\right)$, so ist $a_{ij}^{[k]}$ die Anzahl der verschiedenen Pfeilfolgen von v_i nach v_j der Länge k.*

Beweis. Mit Induktion nach k. Für $k = 1$ folgt die Behauptung aus der Definition der Adjazenzmatrix. Es gilt also für alle $l, j \in \{1, \dots, n\}$:

$$a_{lj}^{[1]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } 1 \text{ von } v_l \text{ nach } v_j.$$

Sei die Behauptung richtig für ein $k \geq 1$. Dann gilt für alle $i, l \in \{1, \dots, n\}$:

$$a_{il}^{[k]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } k \text{ von } v_i \text{ nach } v_l.$$

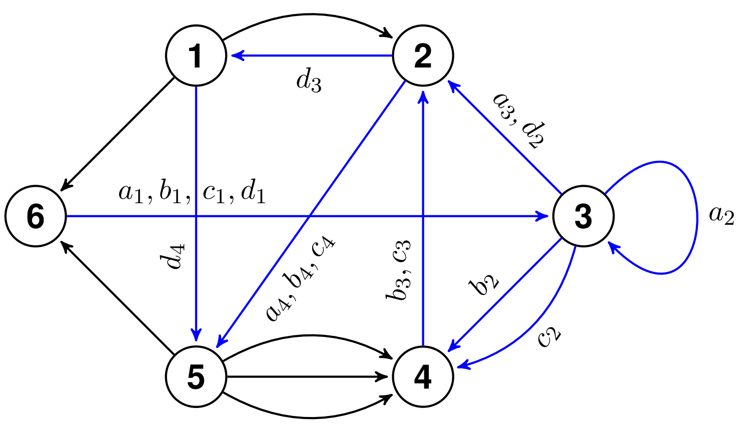
Somit gilt für jedes i, für jedes j und für jedes l:

$$a_{il}^{[k]} \cdot a_{lj}^{[1]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } k+1 \text{ von } v_i \text{ nach } v_j \text{ via } v_l,$$

und

$$a_{ij}^{[k+1]} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}^{[k]} \cdot a_{lj}^{[1]} \text{ ist die Anzahl der Pfeilfolgen der Länge } k+1 \text{ von } v_i \text{ nach } v_j. \qquad \dashv$$

Obiges Beispiel mit A^4: Es gibt 4 verschiedene Pfeilfolgen a, b, c, d der Länge 4 vom Knoten 6 zum Knoten 5.



$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & 7 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 3 & 14 & 7 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 11 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

EULER'SCHE LINIEN & EULER'SCHE PFEILZÜGE

PROPOSITION 7.2. *Sei $G = (V, E)$ ein endlicher, ungerichteter Graph. Dann gilt:*

(a) *Ist $|E| = m$, d. h.*

$$\big|\{\{x, y\} \subseteq V : \langle x, y\rangle \in E\}\big| = m,$$

so ist $\sum_{x \in V} \deg(x) = 2m$.

(b) *Für alle Knoten $x \in V$ ist $\big|\{x \in V : \deg(x) \text{ ist ungerade}\}\big|$ ist gerade.*

Beweis. (a) In der Summe $\sum_{x \in V} \deg(x)$ wird jede Kante zweimal gezählt (auch bei Schlingen), denn jede Kante verbindet entweder zwei verschiedene Knoten oder sie ist eine Schlinge.

(b) Dies folgt direkt aus (a). ⊣

Enthält ein geschlossener Kantenzug eines Graphen G sämtliche Kanten von G, so heisst der Kantenzug **Euler'sche Linie** des Graphen G, und G heisst **Euler'scher Graph**.

PROPOSITION 7.3. *Ein endlicher, ungerichteter, zusammenhängender Graph G ist genau dann ein Euler'scher Graph, wenn jeder Knoten von G geraden Grad besitzt.*

Beweis. ($\Rightarrow$) Besitzt G eine Euler'sche Linie, so kann G in einem Zug gezeichnet werden. Somit ist beim Durchlaufen der Kanten jeder Knoten genauso oft Endpunkt wie Anfangspunkt einer Kante.

($\Leftarrow$) Hat jeder Knoten geraden Grad, so hat, weil der Graph zusammenhängend ist, jeder Knoten mindestens Grad 2.

Wir starten nun in irgend einem Knoten x_0. Da jeder Knoten geraden Grad hat, können wir von jedem von x_0 verschiedenen Knoten aus weiter gehen, und da der Graph endlich ist, müssen wir nach endlich vielen Schritten wieder zu x_0 kommen. Folglich gibt es einen geschlossenen Kantenzug beginnend in x_0.

Haben auf diesem Kantenzug alle Kanten besucht, so sind wir fertig. Andernfalls gibt es auf dem Kantenzug ein Knoten x_1, von dem unbesuchte Kanten ausgehen. Deren Anzahl ist notwendigerweise gerade.

Wir beginnen nun im Knoten x_1 und gehen so lange entlang von noch nicht durchlaufenen Kanten, bis wir wieder beim Knoten x_1 ankommen. Die beiden so erhaltenen Kantenzüge können wir zu einem einzigen Kantenzug zusammenfügen, der in x_0 beginnt und endet.

Haben wir nun auf diesem Kantenzug alle Kanten besucht, so sind wir fertig. Andernfalls machen wir weiter wie oben. Da nun der Graph zusammenhängend ist, wird schliesslich jede Kante besucht und der resultierende geschlossene Kantenzug ist eine Euler'sche Linie. ⊣

Eine Umformulierung der obigen Proposition gibt uns den folgenden Satz von Euler.

THEOREM 7.4 (Euler). *Sämtliche Kanten eines endlichen, ungerichteten, zusammenhängenden Graphen G können genau dann in einem geschlossenen Kantenzug durchlaufen werden, wenn jeder Knoten von G geraden Grad besitzt.*

Enthält ein offener Kantenzug eines Graphen G sämtliche Kanten von G, so heisst der Kantenzug **offene Euler'sche Linie** des Graphen G.

Wie oben können wir folgende Proposition beweisen:

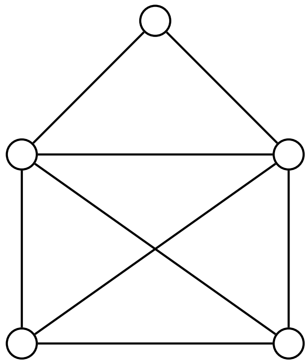
PROPOSITION 7.5. *Ein endlicher, ungerichteter, zusammenhängender Graph G besitzt genau dann eine offene Euler'sche Linie, wenn genau zwei Knoten von G ungeraden Grad besitzen.*

Analog zu (offene) Euler'sche Linie definieren wir **(offener) Euler'scher Pfeilzug**. Wie oben, können wir folgende Proposition beweisen.

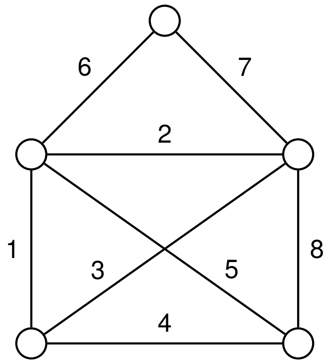
PROPOSITION 7.6. *Ein endlicher, gerichteter, zusammenhängender Graph* $G = (V, E)$ *besitzt genau dann einen Euler'schen Pfeilzug, bzw. einen offenen Euler'schen Pfeilzug, wenn für alle* $x \in V$ *gilt* $\deg^+(x) = \deg^-(x)$*, bzw. für genau zwei Knoten* $x_1, x_2 \in V$ *gilt* $\deg^+(x_1) - \deg^-(x_1) = 1$ *und* $\deg^+(x_2) - \deg^-(x_2) = -1$.

Beispiele:

- Der folgende Graph kann in einem Zug gezeichnet werden.



Eine Möglichkeit ist zum Beispiel:



- **Dominoproblem**: Die Aufgabe ist, sämtliche Dominosteine eines Dominospiels, in dem die Augenzahlen der Steine von 0 bis 16 gehen und auch Doppelsteine mit zweimal derselben Augenzahl vorkommen, so zu einer fortlaufenden (unverzweigten) geschlossenen Kette aneinanderzureihen, dass die aneinander grenzenden Hälften zweier Steine stets dieselbe Augenzahl aufweisen.

  Um dieses Problem zu lösen betrachten den Graphen $G = (V, E)$ mit

$$\begin{aligned} V &:= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}, \\ E &:= \big\{\{a, b\} : a, b \in V\big\}. \end{aligned}$$

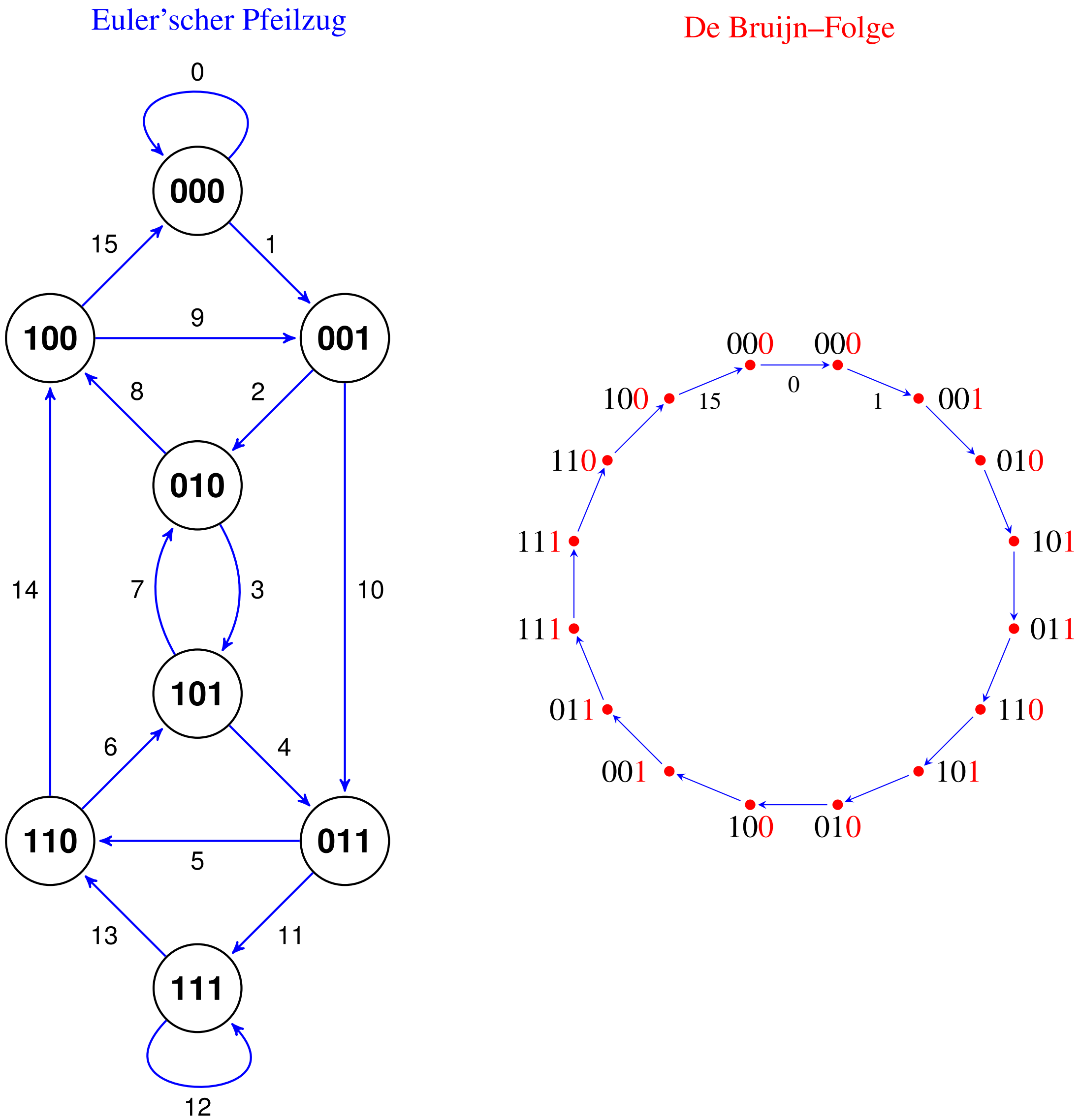
  G ist dann ein regulärer Graph vom Grad 18 (der K_{17} mit 16 Schlingen enthält). Da 18 gerade ist, besitzt G eine Euler'sche Linie, und weil jede Kante als ein Dominostein aufgefasst werden kann (die Nummern der Knoten, welche durch eine Kante verbundenen werden, bezeichnen die Augenzahlen auf dem zur Kante gehörenden Dominostein), entspricht jede Euler'sche Linie in G einer Lösung des Dominoproblems.

- Eine zyklische 0-1–Folge der Länge l heisst **De Bruijn–Folge**, wenn für ein $k \geq 1$ jedes binäre Wort der Länge k genau einmal als Teilwort (zyklisch) auftritt. Aus der Definition folgt, dass, falls eine solche Folge existiert, $l = 2^k$ ist.

  Wir zeigen nun, dass zu jedem k eine De Bruijn–Folge existiert: Für $k = 1$ ist die zyklische Folge 01 der Länge 2 eine De Bruijn–Folge. Sei nun $k \geq 2$. Wir betrachten den Graphen $G_k = (V, E)$ mit

$$\begin{aligned} V &:= \{\langle b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle : b_i \in \{0,1\}\}, \\ E &:= \Big\{\Big\langle \langle b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle, \langle b_2, \ldots, b_k\rangle \Big\rangle : \langle b_1, \ldots, b_{k-1}\rangle, \langle b_2, \ldots, b_k\rangle \in V\Big\}. \end{aligned}$$

  Es ist $|V| = 2^{k-1}$ und $|E| = 2^k$. Weiter gilt für alle $x \in V$, $\deg^+(x) = \deg^-(x) = 2$, und somit enthält G_k einen Euler'schen Pfeilzug. Jeder Euler'sche Pfeilzug von G_k der Länge 2^k erzeugt in natürlicher Weise eine De Bruijn–Folge. Ein Beispiel für $k = 4$:



Bemerkung: Zu jedem $k \geq 1$ existieren bis auf zyklische Vertauschung genau $2^{2^{k-1}-k}$ De Bruijn–Folgen. Für $k = 1$ und $k = 2$ existieren somit nur die De Bruijn–Folgen 01 bzw. 0011, und für $k = 3$ existieren die beiden De Bruijn–Folgen 00010111 und 00011101.