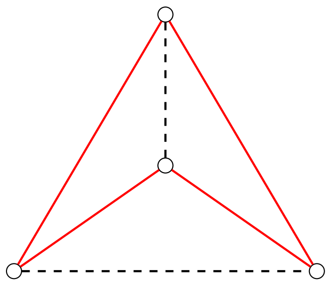
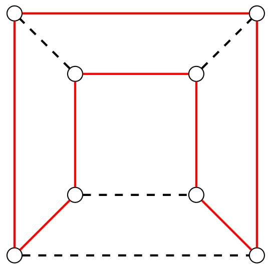
Hamilton'sche Graphen

Ein endlicher ungerichteter Graph $G = (V, E)$ ist ein **Hamilton'scher Graph**, bzw. G ist **hamiltonsch**, wenn G einen Kreis – einen sogenannten **Hamilton-Kreis** – besitzt der alle Knoten von G enthält. Mit anderen Worten, G ist hamiltonsch genau dann, wenn es in G einen Kreis gibt, der alle Knoten von G enthält. Es ist kein einfaches Kriterium bekannt, mit welchem entschieden werden kann, ob ein Graph hamiltonsch ist (im Gegensatz zum Beispiel zu Euler'schen Graphen).

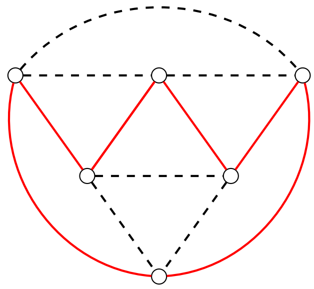
Beispiele für hamiltonsche Graphen sind die vollständigen Graphen K_n (für $n \geq 2$) sowie die Kantengraphen der fünf platonischen Körper:



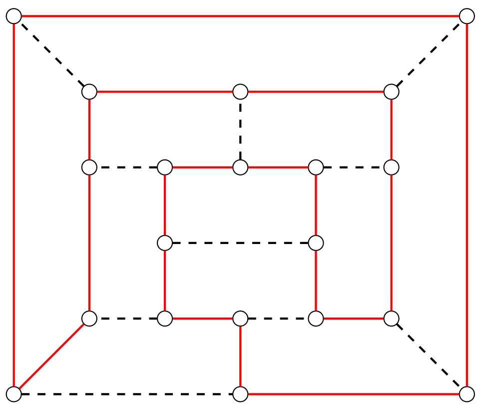
Tetraeder



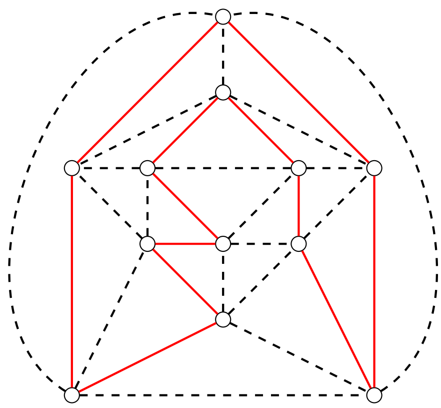
Würfel



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder

Ebenfalls hamiltonsch sind die Kantengraphen der k-dimensionalen Würfel (für $k \geq 2$). Dafür zeigen wir zuerst den folgenden Satz über *Gray-Codes*: Eine zyklische Folge, bestehend aus den 2^k verschiedenen binären Wörtern der Länge $k \geq 1$, heisset **Gray-Code**, falls sich je zwei aufeinander folgende Wörter in genau einer Stelle unterscheiden.

PROPOSITION 7.7. *Zu jedem $k \geq 1$ existiert ein Gray-Code.*

Beweis. Mit Induktion nach k. Für $k = 1$ ist die zyklische Folge $0, 1$ der einzige Gray-Code. Ist

$$(a_1, \dots, a_{2^k})$$

ein Gray-Code für k, wobei jedes a_i ein binäres Wort der Länge k ist, so sind die 2^{k+1} binären Wörter

$$\big(0\,a_1, \dots, 0\,a_{2^k}, 1\,a_{2^k}, 1\,a_{2^k-1}, \dots, 1\,a_1\big)$$

der Länge $k + 1$ ein Gray-Code für $k + 1$. ⊣

KOROLLAR 7.8. *Der Kantengraph des k-dimensionalen Würfels (für $k \geq 2$) ist hamiltonsch.*

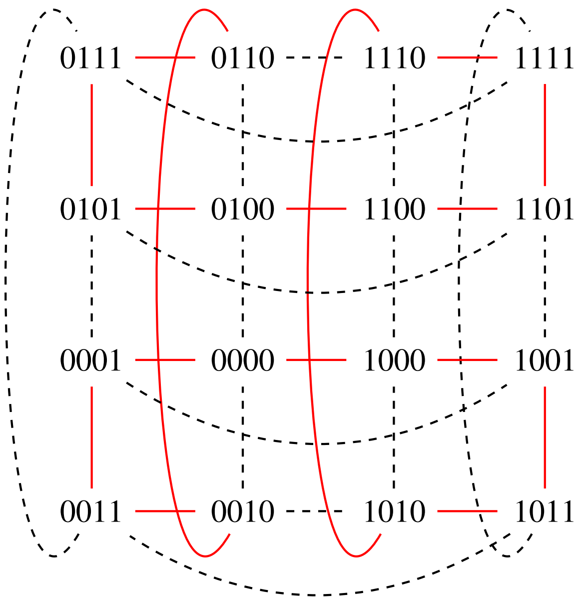
Beweis. Die binären Wörter der Länge k können als Ecken eines k-dimensionalen Würfels aufgefasst werden. Ein Gray-Code entspricht dann einem Hamilton-Kreis im Kantengraphen des k-dimensionalen Würfels. $\dashv$

Beispiel: Im Fall $k = 4$ gibt uns der Beweis von Proposition 7.7 den folgenden Gray-Code mit dem entsprechenden Hamilton-Kreis im Kantengraphen des 4-dimensionalen Würfels.

Gray-Code

0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	1
0	0	1	0
0	1	1	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	1	0	0
1	1	0	0
1	1	0	1
1	1	1	1
1	1	1	0
1	0	1	0
1	0	1	1
1	0	0	1
1	0	0	0

Hamilton-Kreis



DER HEIRATSSATZ

Die Knotenmenge eines **bipartiten Digraphen** (A, B, E) besteht aus zwei disjunkten Mengen A, B (d. h. die Knotenmenge ist $A \dot{\cup} B$) und einer Kantenmenge $E \subseteq A \times B$. Für $X \subseteq A$ und $Y \subseteq B$ sei

$$EX := \{y \in B : \exists x \in X\,(xEy)\} \quad \text{und} \quad E^{-1}Y := \{x \in A : \exists y \in Y\,(xEy)\}.$$

Erweitern wir die Kantenmenge E eines bipartiten Digraphen (A, B, E) zu

$$E^* := E \cup \{\langle y, x\rangle : \langle x, y\rangle \in E\},$$

so ist (A, B, E^*) ein **ungerichteter bipartiter Graph**.

Ist (A, B, E) ein bipartiter Digraph und gilt xEy, also insbesondere $x \in A$ und $y \in B$, so sagen wir, dass x und y befreundet sind. Eine injektive Funktion $\pi : A \to B$ mit $\pi \subseteq E$ ist dann eine **Verheiratung** aller Elemente von A mit Elementen der Menge B, wobei nur befreundete Elemente miteinander verheiratet werden.

DER HEIRATSSATZ (Hall). *Sei (A, B, E) ein bipartiter Digraph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\exists \pi \in {}^{A}B\big(\pi \subseteq E$ *und* π *ist injektiv*$\big)$, *d. h. es gibt eine Verheiratung aller Elemente von A mit Elementen von B.*

(b) *Hall'sche Bedingung:* $\forall X \subseteq A\,\big(|X| \leq |EX|\big)$

Beweis. (a)⇒(b): Aus (a) folgt $|X| = |\pi[X]| \leq |EX|$ für alle $X \subseteq A$.

(b)⇒(a): Mit Induktion nach $|A| =: n$. Der Fall $n = 1$ ist klar. Sei $n > 1$ und sei der Satz bewiesen für alle n' mit $1 \leq n' < n$. Wir betrachten die folgenden beiden Fälle.

1. Fall: Für alle $X \subsetneq A$ sei $|X| < |EX|$. Sei $a'Eb'$ und sei $A' := A \setminus \{a'\}$, $B' := B \setminus \{b'\}$ und $E' := E \cap (A' \times B')$, d. h. E' ist die Menge aller Kanten in E die weder in a' starten noch in b' enden. Dann ist (A', B', E') ein bipartiter Digraph und mit unserer Annahme folgt

$$X \subseteq A' \;\Rightarrow\; |X| < |EX| \;\Rightarrow\; |X| \leq |EX| - 1 \leq |EX \setminus \{b'\}| = |E'X|.$$

Mit der Induktionsvoraussetzung für $n' := |A'| = n-1$ erhalten wir eine Injektion $\pi' : A' \to B'$ mit $\pi' \subseteq E'$ und

$$\pi := \pi' \cup \{\langle a', b' \rangle\}$$

hat die gewünschten Eigenschaften.

2. Fall: Es existiert $A_1 \subsetneq A$ mit $|A_1| = |EA_1|$. Sei $B_1 := EA_1$, und sei $A_2 := A \setminus A_1$, $B_2 := B \setminus B_1$, $E_1 := E \cap (A_1 \times B_1)$ und $E_2 := E \cap (A_2 \times B_2)$. Nun kann die Induktionsvoraussetzung sowohl auf (A_1, B_1, E_1) wie auch auf (A_2, B_2, E_2) angewandt werden und wir erhalten zwei Injektionen $\pi_1 : A_1 \to B_1$ und $\pi_2 : A_2 \to B_2$ mit $\pi_1 \subseteq E_1$ und $\pi_2 \subseteq E_2$. Die Existenz einer Injektion π_1 ist klar, denn aus $X \subseteq A_1$ folgt $EX \subseteq B_1$. Um zu sehen, dass eine Injektion $\pi_2 : A_2 \to B_2$ existiert, nehmen wir für einen Widerspruch an, dass eine Menge $X \subseteq A_2$ existiert mit $|X| > |E_2X|$, wobei $E_2X \subseteq B_2$. Mit der Definition der Mengen A_1 und A_2, der Annahmen $|A_1| = |EA_1|$ und $|E_2X| < |X|$, sowie der Induktionsvoraussetzung erhalten wir

$$|E(A_1 \,\dot\cup\, X)| = |EA_1 \cup EX| = |EA_1 \,\dot\cup\, E_2X| = |EA_1| + |E_2X| < |A_1| + |X| = |A_1 \,\dot\cup\, X|,$$

was aber ein Widerspruch zur Voraussetzung (b) ist.

Mit den Injektionen π_1 und π_2 definieren wir nun $\pi : A \to B$ wie folgt:

$$\pi(a) := \begin{cases} \pi_1(a) & \text{für } a \in A_1, \\ \pi_2(a) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\pi : A \to B$ eine Injektion mit $\pi \subseteq E$, d. h. π hat die gewünschten Eigenschaften. ⊣

Das folgende Resultat behandelt den Fall, wenn jedes Element aus A (bzw. B) mit r (bzw. s) Elementen aus B (bzw. A) befreundet ist.

KOROLLAR 7.9. *Sei (A, B, E) ein bipartiter Digraph mit $|A| = n \leq m = |B|$. Existieren positive ganze Zahlen r und s, sodass gilt $\forall a \in A\,(|E\{a\}| = r)$ und $\forall b \in B\,(|E^{-1}\{b\}| = s)$, so existiert eine Verheiratung aller Elemente von A mit Elementen von B.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Hall'sche Bedingung erfüllt ist. Nach Voraussetzung gilt $r \cdot n = |E| = s \cdot m$. Somit ist $s = \frac{r \cdot n}{m}$, und weil $n \leq m$ ist $s \leq r$. Wäre nun die Hall'sche Bedingung nicht erfüllt, so gäbe es eine Menge $X \subseteq A$ mit $l := |X| > |EX| =: k$. Sei $B' := EX$ und $E' := E \cap (X \times B')$. Dann ist $r \cdot l = |E'| \leq s \cdot k$, also $s \geq \frac{r \cdot l}{k}$. Weil $l > k$ ist $\frac{r \cdot l}{k} > r$ und somit erhalten wir $s > r$, was aber $s \leq r$ widerspricht. ⊣

Um den nächsten Satz zu formulieren, müssen wir die Begriffe *trennende Knotenmenge* und *Paarung* einführen.

Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger ungerichteter Graph und seien $A, B \subseteq V$ zwei disjunkte Knotenmengen (d. h. $A \cap B = \emptyset$). Weiter sei $U \subseteq V$ eine beliebige Knotenmenge. Dann werden die Mengen A und B durch die Menge U **getrennt**, wenn jeder Kantenzug von einem Knoten $a \in A$ nach einem Knoten $b \in B$ mindestens einen Knoten aus U enthält. Die Menge U ist dann eine **trennende Knotenmenge** (engl. *separator*) bzgl. den Mengen A und B.

Sei $G = (V, E)$ ein beliebiger ungerichteter Graph. Eine **Paarung** (engl. *matching*) ist eine Teilmenge $\pi \subseteq E$ für die gilt:

$$\forall \langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle \in \pi \left(\langle x, y\rangle \neq \langle x', y'\rangle \;\rightarrow\; \{x, y\} \cap \{x', y'\} = \emptyset \right)$$

Eine Paarung in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ ist also eine Injektion $\pi : A \to B$, wobei A und B zwei disjunkte Knotenmengen von V sind und für alle $\langle a, b\rangle \in \pi$ gilt, dass a und b adjazent sind.

THEOREM 7.10. *Sei (A, B, E) ein ungerichteter bipartiter Graph mit $|A| =: n$. Dann gilt:*

$$\max_{\pi \text{ Paarung}} |\pi| = n - \max_{X \subseteq A} \big(\underbrace{|X| - |EX|}_{\text{Defekt von } X} \big) = \min_{U \text{ trennt } A \,\&\, B} |U|$$

Beweis. $\max |\pi| \geq n - \max(|X| - |EX|)$: Wir definieren l als den maximalen Defekt, also

$$l := \max_{X \subseteq A} (|X| - |EX|).$$

Sei $X_0 \subseteq A$ mit $|X_0| - |EX_0| = l$ und sei $k := |X_0|$. Dann ist $|EX_0| = k - l$. Sei nun weiter

$$Y_0 := A \setminus X_0, \quad E' := \big\{ \langle x, y\rangle \in E : x \in X_0 \big\}, \quad E'' := \big\{ \langle x, y\rangle \in E : x \in Y_0 \wedge y \notin EX_0 \big\}.$$

1. Behauptung: $(Y_0, E''Y_0, E'')$ erfüllt die Hall'sche Bedingung.

Denn: Sei $Y \subseteq Y_0$ mit $|Y| > |E''Y|$, dann wäre $|X_0 \dot\cup Y| - |E(X_0 \dot\cup Y)| > l$, was der Definition von l widerspricht. Also existiert eine Injektion $\pi'' : Y_0 \to E''Y_0$ mit $\pi'' \subseteq E''$, insbesondere ist π'' eine Paarung.

2. Behauptung: $(EX_0, X_0, (E')^{-1})$ erfüllt die Hall'sche Bedingung.

Denn: Sei $Z \subseteq EX_0$ mit $|Z| > |\underbrace{(E')^{-1}Z}_{=:Z_0}|$, d. h. $|Z| > |Z_0|$.

Dann wäre

$$|X_0 \setminus Z_0| - |E(X_0 \setminus Z_0)| = |X_0| - |Z_0| - \big(|EX_0| - |Z|\big) = \big(|X_0| - |EX_0|\big) + \big(|Z| - |Z_0|\big) > l,$$

was der Definition von l und X_0 widerspricht. Also existiert eine Injektion $\pi' : EX_0 \to X_0$ mit $\pi' \subseteq E'$, insbesondere ist π' eine Paarung.

Mit den Paarungen π'' und π' lässt sich dann die Paarung $\pi := \pi'' \cup \pi'$ konstruieren für die gilt $|\pi| = n - l$, insbesondere ist $\max |\pi| \geq n - l$.

$n - \max(|X| - |EX|) \geq \min |U|$: Seien X_0 und l wie oben und sei

$$U_0 := (A \setminus X_0) \,\dot\cup\, EX_0.$$

Dann trennt U_0 sicher A und B und es gilt

$$|U_0| = \big(n - |X_0|\big) + \big(|X_0| - l\big) = n - l.$$

$\min |U| \geq \max |\pi|$: Sei π eine Paarung und $U \subseteq A \cup B$ eine Knotenmenge die A und B trennt. Dann gilt für alle $\langle x, y\rangle \in \pi$, $\{x, y\} \cap U \neq \emptyset$ (d. h. $1 \leq |\{x, y\} \cap U| \leq 2$), und aus der Definition einer Paarung folgt $|\pi| \leq |U|$.

Wir haben somit $\max |\pi| \geq n - \max(|X| - |EX|) \geq \min |U| \geq \max |\pi|$, womit das Theorem bewiesen ist. $\dashv$