# Musterlösung Serie 15

## Minimalpolynom, Cayley-Hamilton

1. Für $n \geqslant 1$ und einen beliebigen Parameter $\lambda \in K$ betrachte die $n \times n$-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Bestimme $A^k$ für alle $k \geqslant 0$.

*Lösung*: Schreibe $A = \lambda I_n + N$ mit der Einheitsmatrix $I_n$ und der Matrix

$$N := \Big(\delta_{j-i,1}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit einem Induktionsargument folgt für alle $m \geqslant 0$

$$N^m = \Big(\delta_{j-i,m}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

Insbesondere ist $N^m$ die Nullmatrix für alle $m \geqslant n$. Da $N$ und $I_n$ kommutieren, folgt aus der binomischen Formel

$$\begin{aligned} A^k &= (\lambda I_n + N)^k = \sum_{m=0}^{k} \tbinom{k}{m} \lambda^{k-m} N^m \\ &= \Big(\sum_{m=0}^{k} \tbinom{k}{m} \lambda^{k-m} \delta_{j-i,m}\Big)_{i,j} \\ &= \Big(\tbinom{k}{j-i} \lambda^{k-j+i}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}, \end{aligned}$$

wobei wir $\binom{k}{j-i}\lambda^{k-j+i}$ für $j - i \notin \{0, \dots, k\}$ als 0 interpretieren.

In den Fällen $n = 1, 2, 3, 4$ ergeben sich konkret

$$\begin{aligned}
&(\lambda^k) && \text{für } n = 1 \\
&\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} && \text{für } n = 2 \\
&\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} && \text{für } n = 3 \\
&\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \binom{k}{3}\lambda^{k-3} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix} && \text{für } n = 4\,.
\end{aligned}$$

2. Berechne die Minimalpolynome der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Lösung*:

(a) Die Matrix $A$ hat das charakteristische Polynom $(X-7)^4$. Da das Minimalpolynom von $A$ das Polynom $(X-7)^4$ teilt, muss es die Form $\varphi(X) = (X-7)^k$ haben für ein $k \leqslant 4$. Eine kleine Rechnung zeigt $A - 7I_4 \neq O$ und $(A-7I_4)^2 = O$. Also gilt $\varphi(X) = (X-7)^2$.

(b) Die Matrix $B$ hat das charakteristische Polynom $(X-1)^3(X-2)^2$. Da das Minimalpolynom von $B$ das charakteristische Polynom teilt und dieselben Nullstellen besitzt, muss es die Form

$$p_{\alpha,\beta}(X) := (X-1)^\alpha (X-2)^\beta$$

haben für gewisse $1 \leqslant \alpha \leqslant 3$ und $1 \leqslant \beta \leqslant 2$. Schreibe $B$ als Blockmatrix $\left(\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline 0 & B_3 \end{array}\right)$ mit einer $3 \times 3$-Matrix $B_1$ und Matrizen $B_2, B_3$ geeigneter Grösse. Für jedes Polynom $p(X)$ gilt dann

$$p(B) = \left(\begin{array}{c|c} p(B_1) & * \\ \hline 0 & p(B_3) \end{array}\right).$$

Für das Minimalpolynom $p$ von $B$ muss daher $p(B_1) = p(B_3) = 0$ gelten, also muss es durch die Minimalpolynome von $B_1$ und $B_2$ teilbar sein.

Nun hat $B_1$ das charakteristische Polynom $(X-1)^3$ und es gilt $B_1 - I_3 \neq O$ aber $(B_1 - I_3)^2 = O$; also hat $B_1$ das Minimalpolynom $(X-1)^2$. Weiter hat $B_2$ das charakteristische Polynom $(X-2)^2$ und es gilt $B_2 - I_2 = O$; also hat $B_2$ das Minimalpolynom $X-2$. Somit ist das Minimalpolynom von $B$ durch $p_{2,1}(X) = (X-1)^2(X-2)$ teilbar. Schliesslich berechnen wir, dass schon $p_{2,1}(B) = O$ ist. Somit hat $B$ das Minimalpolynom $p_{2,1}(X) = (X-1)^2(X-2)$.

3. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finde ein Polynom $p(X)$ mit $p(A) = A^{-1}$.

   *Lösung*: Das charakteristische Polynom von $A$ ist

$$\mathrm{char}_A(X) = X^3 - 6X^2 - 3X + 18.$$

   Nach dem Satz von Caley-Hamilton gilt

$$\mathrm{char}_A(A) = A^3 - 6A^2 - 3A + 18I_3 = 0,$$

   also

$$I_3 \;=\; -\frac{1}{18}A^3 + \frac{1}{3}A^2 + \frac{1}{6}A \;=\; \Big(-\frac{1}{18}A^2 + \frac{1}{3}A^2 + \frac{1}{6}I_3\Big) \cdot A.$$

   Insbesondere ist $A$ invertierbar und es folgt

$$A^{-1} = -\frac{1}{18}A^2 + \frac{1}{3}A + \frac{1}{6}I_3\,.$$

4. Sei $A$ eine beliebige $n \times n$-Matrix vom Rang $r$. Zeige, dass der Grad des Minimalpolynoms von $A$ kleiner oder gleich $r+1$ ist.

   *Lösung*: Nach der Definition des Rangs ist das Bild von $L_A$ ein Unterraum der Dimension $r$. Betrachte die Einschränkung

$$F := L_A|_{\mathrm{Bild}(L_A)} : \mathrm{Bild}(L_A) \to \mathrm{Bild}(L_A).$$

   Das charakteristische Polynom $q(X) := \mathrm{char}_F(X)$ von $F$ hat Grad $r$ und nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $q(F) = 0$.

   Für $p(X) := q(X) \cdot X$ folgt für alle $v \in K^n$

$$p(L_A)(v) = (q(L_A) \circ L_A)(v) = q(L_A)(Av) = q(F)(Av) = 0,$$

   also $p(L_A) = 0$, also $p(A) = 0$. Nach Definition teilt das Minimalpolynom von $A$ das Polynom $p(X)$. Folglich ist der Grad des ersteren kleiner oder gleich dem Grad von $p(X)$, also kleiner oder gleich $r+1$.

5. Sei $A$ eine $n \times n$-Matrix. Beweise, dass der Unterraum $\langle I_n, A, A^2, \dots \rangle$ von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ Dimension $\leqslant n$ hat.

   *Lösung*: Der Unterraum $W := \langle I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1} \rangle$ von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ ist von $n$ Elementen erzeugt, hat also Dimension $\leqslant n$. Es genügt daher zu zeigen, dass $W = \langle I_n, A, A^2, \dots \rangle$ ist. Hier ist die Inklusion „$\subset$" bereits klar, also bleibt zu zeigen:

   *Behauptung:* Für alle $k \geqslant 0$ ist $A^k \in W$.

   Wir beweisen dies durch Induktion nach $k$.

   *Induktionsverankerung:* Für $k \leqslant n-1$ gilt dies nach Konstruktion von $W$.

   *Oops:* Im Fall $n = 0$ ist diese Aussage leer, also gar keine Verankerung. Aber dann ist sowieso $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ der Nullraum und der fragliche Raum ebenso, hat also Dimension $n = 0$, wie gewünscht. Im folgenden sei daher $n \geqslant 1$.

   *Induktionsschritt:* Sei $k \geqslant n$.

   *Induktionsvoraussetzung:* Die Behauptung sei richtig für alle kleineren Werte von $k$.

   Das charakteristische Polynom von $A$ ist normiert vom Grad $n$; schreiben wir es in der Form $\mathrm{char}_A(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $\mathrm{char}_A(A) = 0$, also

$$A^n \;=\; -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i.$$

   Durch Multiplizieren mit $A^{k-n}$ ergibt sich daraus

$$A^k \;=\; -\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^{i+k-n} \;=\; -\sum_{j=k-n}^{k-1} a_{j-k+n} A^j.$$

   Nach Induktionsvoraussetzung liegen alle $A^j$ auf der rechten Seite in $W$; daher liegt auch $A^k$ in $W$, was zu zeigen war.

*6. Beweise oder widerlege: Es existiert eine reelle $n \times n$-Matrix $A$ mit

$$A^2 + 2A + 5I_n = 0$$

   genau dann, wenn $n$ gerade ist.

   *Lösung*: Die Behauptung ist richtig.

   „$\Rightarrow$": Das reelle Polynom $p(X) := X^2 + 2X + 5$ hat die komplexen Nullstellen $-1 \pm 2i$; diese sind nicht reell. Sei nun $A$ eine $n \times n$-Matrix mit $p(A) = 0$ und $n$ ungerade. Dann hat das charakteristische Polynom von $A$ den ungeraden Grad $n$, besitzt also eine reelle Nullstelle $\lambda$. Diese ist ein Eigenwert von $A$, sagen wir mit dem zugehörigem Eigenvektor $v$. Für diesen folgt

$$0 = p(A)v = (A^2 + 2A + 5I_n)v = (\lambda^2 + 2\lambda + 5)v = P(\lambda)v,$$

also $P(\lambda) = 0$. Dies widerspricht der Tatsache, dass $p$ keine reelle Nullstelle besitzt.

„$\Leftarrow$“: Nach dem Satz von Cayley-Hamilton erfüllt jede $2 \times 2$-Matrix $A_2$ mit charakteristischem Polynom $p(X)$ die gewünschte Gleichung, zum Beispiel die Begleitmatrix $A_2 := \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Für beliebiges gerades $n \geqslant 0$ sei $A$ die $n \times n$-Blockmatrix

$$A := \begin{pmatrix} A_2 & & \\ & \ddots & \\ & & A_2 \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$A^2 + 2A + 5I_n = \begin{pmatrix} A_2 + 2A_2 + 5I_2 & & \\ & \ddots & \\ & & A_2 + 2A_2 + 5I_2 \end{pmatrix} = 0.$$

*7. Zeige den Satz von Cayley-Hamilton für alle $n \times n$-Dreiecksmatrizen durch Induktion über $n$.

*Lösung*:

Induktionsanfang $n = 0$: In diesem Fall ist das charakteristische Polynom $\varphi = 1$ und es gilt $\varphi(A) = O$.

Induktion $n \to n+1$: Sei $A$ eine $(n+1) \times (n+1)$-Dreiecksmatrix. Nach eventuellem Ersetzen von $A$ durch $A^T$ ist $A$ eine obere Dreiecksmatrix. Schreibe $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & v \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$ mit einem Skalar $\lambda$, einem Zeilenvektor $v$ der Länge $n$, und einer $n \times n$-Dreiecksmatrix $B$. Sei $\psi$ das charakteristische Polynom von $B$, dann ist $\varphi(X) := (X - \lambda) \cdot \psi(X)$ das charakteristische Polynom von $A$. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt schon $\psi(B) = O_n$. Daher ergibt sich (unter Benutzung der letzten Bemerkung in Abschnitt 3.3 der Zusammenfassung)

$$\psi(A) = \begin{pmatrix} \psi(\lambda) & w \\ 0 & \psi(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(\lambda) & w \\ 0 & O_n \end{pmatrix}$$

mit einem gewissen Zeilenvektor $w$. Andererseits ist

$$A - \lambda I_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & B - \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= (A - \lambda I_{n+1}) \cdot \psi(A) = \begin{pmatrix} 0 & v \\ 0 & B - \lambda I_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi(\lambda) & w \\ 0 & O_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot \psi(\lambda) + v \cdot 0 & 0 \cdot w + v \cdot O_n \\ 0 \cdot \psi(\lambda) + (B - \lambda I_n) \cdot 0 & 0 \cdot w + (B - \lambda I_n) \cdot O_n \end{pmatrix} = O_{n+1}. \end{aligned}$$