Musterlösung Serie 16

Minimalpolynom, Hauptraumzerlegung, Jordansche Normalform

1. Finde für jedes $k = 1, \ldots, 5$ eine komplexe 5×5-Matrix mit Minimalpolynom $(X-1)^k$.

   Lösung: Eine komplexe Matrix A hat Minimalpolynom $(X-1)^k$, wenn 1 der einzige Eigenwert und der grösste Jordanblock ein $k \times k$-Block ist. Somit finden wir folgende Beispiele:

$$\text{Minimalpolynom } X-1\colon \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Minimalpolynom } (X-1)^2\colon \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Minimalpolynom } (X-1)^3\colon \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Minimalpolynom } (X-1)^4\colon \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Minimalpolynom } (X-1)^5\colon \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Beweise oder widerlege:

   (a) Je zwei $n \times n$-Matrizen über K mit demselben Minimalpolynom sind ähnlich.

   (b) Je zwei $n \times n$-Matrizen über K mit demselben Minimalpolynom und demselben charakteristischen Polynom sind ähnlich.

   (c) Je zwei $n \times n$-Matrizen über K mit demselben charakteristischen Polynom, welches keine mehrfachen irreduziblen Faktoren besitzt, sind ähnlich.

   Lösung:

   (a) Die komplexen Matrizen
   $$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   besitzen beide das Minimalpolynom $(X-1)(X-2)$. Wegen $\det(A) = 2 \neq \det(B) = 4$ sind sie aber nicht ähnlich.

   (b) Die komplexen Matrizen
   $$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$
   haben beide das charakteristische Polynom $(X-1)^5$ und das Minimalpolynom $(X-1)^3$. Da sie schon in Jordanscher Normalform sind und nicht durch Vertauschung von Jordanblöcken ineinander übergehen, sind sie nicht ähnlich.

   (c) Sei A eine Matrix mit einem charakteristischen Polynom, welches keine mehrfachen irreduziblen Faktoren besitzt. Die Jordansche Normalform von A besitzt dann zu jedem irreduziblen Faktor $p(X)$ von $\mathrm{char}_A(X)$ genau einen Jordanblock, und dieser ist die Begleitmatrix von $p(X)$. Somit ist die Jordansche Normalform von A durch $\mathrm{char}_A(X)$ bis auf Vertauschung eindeutig bestimmt. Insbesondere haben also zwei Matrizen von dieser Form dieselbe Jordansche Normalform, sind also ähnlich. Damit ist die Aussage bewiesen.

3. Betrachte einen endlich-dimensionalen K-Vektorraum der Form $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$. Für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ sei f_i ein Endomorphismus von V_i, und sei f der von diesen induzierte Endomorphismus von V. Zeige, dass das Minimalpolynom von f das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimalpolynome der f_i ist.

   Lösung: Der Endomorphismus f ist definiert durch die Gleichung
   $$f(v_1 + \ldots + v_r) \;=\; f_1(v_1) + \ldots + f_r(v_r)$$

für alle $v_i \in V_i$. Für jedes Polynom $\psi \in K[X]$ folgt daraus

$$\psi(f)(v_1 + \ldots + v_r) \;=\; \ldots \;=\; \psi(f_1)(v_1) + \ldots + \psi(f_r)(v_r).$$

Daher ist $\psi(f) = 0$ genau dann, wenn $\psi(f_i) = 0$ ist für alle i.

Seien nun φ das Minimalpolynom von f und φ_i das Minimalpolynom von f_i. Wegen $\varphi(f) = 0$ gilt dann auch $\varphi(f_i) = 0$, und nach der Definition von φ_i folgt daraus $\varphi_i|\varphi$. Für das normierte kleinste gemeinsame Vielfache φ' aller φ_i gilt daher ebenfalls $\varphi'|\varphi$. Andererseits gilt nun $\varphi'(f_i) = 0$ für alle i und nach der obigen Äquivalenz daher auch $\varphi'(f) = 0$. Nach der Definition von φ folgt daraus $\varphi|\varphi'$. Aus $\varphi'|\varphi$ und $\varphi|\varphi'$ sowie dem Umstand, dass beide Polynome normiert sind, folgt schliesslich die Gleichheit $\varphi' = \varphi$.

4. Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V mit dem Minimalpolynom φ. Sei $\psi \in K[X]$ ein beliebiges Polynom. Zeige, dass $\psi(f)$ genau dann ein Automorphismus ist, wenn ψ und φ teilerfremd ist.

   Lösung: Sind ψ und φ nicht teilerfremd, so haben sie einen irreduziblen normierten gemeinsamen Teiler p. Dieser teilt dann auch das charakteristische Polynom von f, und daher ist $\mathrm{Kern}(p(f)) \neq 0$. Nun gilt aber $\psi = \chi \cdot p$ für ein $\chi \in K[X]$ und somit

$$0 \;\neq\; \mathrm{Kern}(p(f)) \;\subset\; \mathrm{Kern}(\chi(f) \circ p(f)) \;=\; \mathrm{Kern}(\psi(f)).$$

   Also ist $\psi(f)$ nicht injektiv und kann daher kein Automorphismus sein.

   Sei umgekehrt $\psi(f)$ kein Automorphismus. Dann ist $U := \mathrm{Kern}(\psi(f)) \neq 0$. Für alle $u \in U$ gilt nun $\psi(f)(f(u)) = f(\psi(f)(u)) = f(0) = 0$ und daher $f(u) \in U$. Also ist U ein f-invarianter Unterraum. Sei ω das Minimalpolynom von $f|U$. Wegen $\psi(f)|U = 0$ gilt dann $\omega|\psi$. Aus $U \neq 0$ folgt ausserdem $\deg(\omega) \geqslant 1$. Dieses ω teilt das charakteristische Polynom von $f|U$ und damit ebenfalls das charakteristische Polynom von f. Wegen $\deg(\omega) \geqslant 1$ besitzt ω nun einen irreduziblen Faktor p, und da das charakteristische Polynom von f dieselben irreduziblen Faktoren hat wie das Minimalpolynom φ von f, gilt dann auch $p|\varphi$. Somit ist p ein nicht-trivialer gemeinsamer Teiler von ψ und φ; also sind ψ und φ nicht teilerfremd.

*5. Sei f ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) Das Minimalpolynom von f ist gleich dem charakteristischen Polynom von f.

   (b) Es existiert eine geordnete Basis B von V, so dass die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ die Begleitmatrix eines Polynoms ist.

   Lösung: Nach einem Satz aus §9.3 der Vorlesung hat die Begleitmatrix eines normierten Polynoms φ genau dieses Polynom als Minimalpolynom und als charakteristisches Polynom. Also gilt (b)$\Rightarrow$(a).

Nehmen wir umgekehrt (a) an. Seien $p_1, \ldots, p_r$ die verschiedenen normierten irreduziblen Faktoren des charakteristischen und Minimal-Polynoms $\varphi = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i}$ von f. Für jedes i sei

$$V_i \ := \ \mathrm{Hau}_{p_i}(f) \ := \ \mathrm{Kern}(p_i^{m_i}(f))$$

der Hauptraum von f bezüglich p_i. Nach §9.4 der Vorlesung ist jedes V_i ein f-invarianter Unterraum und es gilt $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$. Wegen $p_i^{m_i}(f)|V_i = 0$ ist das Minimalpolynom von $f|V_i$ dann ein Teiler von $p_i^{m_i}$. Nach Aufgabe 3 ist das kleinste gemeinsame Vielfache dieser Minimalpolynome aber gleich dem Minimalpolynom $\varphi = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i}$ von f. Somit ist das Minimalpolynom von $f|V_i$ gleich $p_i^{m_i}$. Daher ist $p_i^{m_i-1}(f))|V_i \neq 0$, und es gibt einen Vektor $v_i \in V_i$ mit $p_i^{m_i-1}(f))(v_i) \neq 0$.

Setze $v := \sum_{i=1}^r v_i$, und sei V' der von allen Vektoren $v, f(v), f^2(v), \ldots$ erzeugte Unterraum von V. Nach Konstruktion ist dieser f-invariant. Sei f' der von f induzierte Endomorphismus von V', und sei φ' dessen Minimalpolynom. Wegen $\varphi(f) = 0$ gilt dann $\varphi(f') = 0$ und folglich $\varphi'|\varphi$. Daher ist $\varphi' = \prod_{i=1}^r p_i^{m'_i}$ mit Exponenten $0 \leqslant m'_i \leqslant m_i$.

Aus $\varphi'(f) = 0$ folgt nun

$$0 \ = \ \varphi'(f)(v) \ = \ \varphi'(f)(v_1) + \ldots + \varphi'(f)(v_r).$$

Da hier jedes $\varphi'(f)(v_i)$ in V_i liegt, folgt aus der direkten Summe $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$, dass schon jedes $\varphi'(f)(v_i) = 0$ ist. Die Faktorisierung von φ' liefert damit

$$\Big(\prod_{j\neq i} p_j^{m'_j}(f)\Big)\big(p_i^{m'_i}(f)(v_i)\big) \ = \ 0.$$

Da das Polynom $\prod_{j\neq i} p_j^{m'_j}$ teilerfremd zu p_i ist, impliziert nun Aufgabe 4, dass $\prod_{j\neq i} p_j^{m'_j}(f)|V_i$ ein Automorphismus ist. Aus der letzten Gleichung folgt daher schon $p_i^{m'_i}(f)(v_i) = 0$. Nach Konstruktion von v_i gilt aber $p_i^{m_i-1}(f)(v_i) \neq 0$; also muss $m'_i \geqslant m_i$ sein. Wegen $0 \leqslant m'_i \leqslant m_i$ lässt dies nur die Möglichkeit $m'_i = m_i$. Also ist $\varphi' = \varphi$.

Damit ist gezeigt, dass das Minimalpolynom von $f|U$ gleich dem charakteristischen Polynom von f ist. Insbesondere sind deren Grad gleich. Nun teilt aber das Minimalpolynom von $f|U$ das charakteristische Polynom von $f|U$ und letzteres hat den Grad $\dim(U)$. Da ausserdem das charakteristische Polynom von f den Grad $\dim(V)$ hat, folgt $\dim(U) \geqslant \dim(V)$. Wegen $U \subset V$ muss daher $U = V$ sein.

Dies bedeutet schliesslich, dass die Vektoren $f^k(v)$ für $0 \leqslant k < n = \dim(V)$ eine Basis von V bilden. Für die geordnete Basis $B := (f^{n-1}(v), \ldots, f(v), v)$ ist die Darstellungsmatrix dann eine Begleitmatrix.

6. Bestimme die Haupträume der folgenden reellen Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 2 \\ -7 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

A: Die Matrix A hat das charakteristische Polynom X^4. Es existiert also genau ein Hauptraum zum irreduziblen Faktor X, der nach dem Satz über die Hauptraumzerlegung gleich $\mathbb{R}^4$ sein muss: $\mathrm{Hau}_X(A) = \mathbb{R}^4$.

B : Die Matrix B hat das charakteristische Polynom $(X-1)^3(X+1)$. Der Hauptraum zum Faktor $X+1$ ist

$$\mathrm{Hau}_{X+1}(B) \;=\; \mathrm{Kern}(B+I_4) \;=\; \mathrm{Eig}_{-1}(B) \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Der Hauptraum zum Faktor $X-1$ ist nach Definition der Kern der Abbildung $(B-I_4)^3$. Wir haben

$$(B-I_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

also

$$\mathrm{Hau}_{X-1}(B) \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

C : Das charakteristische Polynom der Matrix C ist

$$\mathrm{char}_C(X) \;=\; X^3 - 5X^2 + 8X - 6 \;=\; (X-3)(X^2-2X+2)\,.$$

Der Hauptraum zum Faktor $X-3$ ist

$$\mathrm{Hau}_{X-3}(C) \;=\; \mathrm{Eig}_3(C) \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

Der Faktor $p(X) := X^2 - 2X + 2$ hat keine reellen Nullstellen, ist also irreduzibel über $\mathbb{R}$. Mit

$$p(C) \;=\; C^2 - 2C + 2I_3 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\mathrm{Hau}_{p(X)}(C) \;=\; \mathrm{Kern}\, p(C) \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

D : Das charakteristische Polynom der Matrix D ist

$$\mathrm{char}_D(X) \;=\; X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4 \;=\; (X-2)^2 \cdot (X-1)^2 .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Hau}_{X-2}(D) \;&=\; \mathrm{Kern}((D - 2I_4)^2) \\ &=\; \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 & -3 \\ 13 & -3 & 5 & -5 \\ -8 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Hau}_{X-1}(D) \;&=\; \mathrm{Kern}((D - I_4)^2) \\ &=\; \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

7. Bestimme die Jordansche Normalform der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_3$:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Lösung: Über $\mathbb{R}$ hat A das charakteristische Polynom $(X-1)^2(X-4)$. Der Eigenraum zum Eigenwert 4 hat also Dimension 1. Sodann berechnen wir $\mathrm{Rang}(A - I_3)$ $= 1$; deshalb hat der Eigenraum zum Eigenwert 1 die Dimension 2. Deshalb existiert eine Basis aus Eigenvektoren und die Matrix ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$ mit der Jordanschen Normalform

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Über $\mathbb{F}_3$ ist das charakteristische Polynom gleich $(X-1)^3$; somit besitzt A genau einen Hauptraum zum Faktor $X-1$. Wir rechnen

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und $(A-I_3)^k = 0$ für $k \geqslant 2$. Aus $\dim \mathrm{Kern}(A - I_3) = 2$ folgt, dass es jeweils einen Jordanblock der Grösse 1 und 2 gibt. Somit hat die Matrix A über $\mathbb{F}_3$ die Jordansche Normalform

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$