Musterlösung Serie 17

Jordansche Normalform & Normen

1. Bestimme die Jordansche Normalform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der reellen Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom der Matrix A ist
$$\mathrm{char}_A(X) \;=\; X^4 - 11X^3 + 45X^2 - 81X + 54 \;=\; (X-2)\cdot(X-3)^3\,.$$

Wir betrachten die Eigenwerte 2 und 3 separat.

Eigenwert 2: Der Raum $\mathrm{Hau}_{X-2}(A)$ ist eindimensional und gleich dem Eigenraum von A zum Eigenwert 2. Wir berechnen $\mathrm{Kern}(L_{A-2I_4})$ und finden den zugehörigen Eigenvektor
$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eigenwert 3: Für $B := A - 3I_4$ gilt
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B^3.$$

Dies impliziert

k	1	2	3	4	$\cdots$
$\mathrm{Rang}(B^k)$	2	1	1	1	$\cdots$
$\dim \mathrm{Kern}(L_{B^k})$	2	3	3	3	$\cdots$
# $k \times k$-Jordanblöcke zum EW 3	1	1	0	0	$\cdots$

Sodann rechnen wir

$$\mathrm{Hau}_{X-3}(A) \;=\; \mathrm{Kern}(L_{B^3}) \;=\; \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle .$$

Dann suchen wir einen Vektor $v_2 \in \mathrm{Hau}_{X-3}(A)$, dessen Bild unter L_B ungleich Null ist. Zum Beispiel tut es

$$v_2 := \begin{pmatrix}-6\\0\\0\\1\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad Bv_2 = \begin{pmatrix}8\\2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Diesen ergänzen wir um einen beliebigen Vektor $v_3 \in \mathrm{Kern}(L_B) \smallsetminus \langle Bv_2 \rangle$, zum Beispiel

$$v_3 := \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Dann bildet v_2, Bv_2, v_3 eine Basis von $\mathrm{Hau}_{X-3}(A)$.

Zusammenführung: Nach der Hauptraumzerlegung ist $b := (v_1, Bv_2, v_2, v_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Nach Konstruktion gilt für diese $Av_1 = 2v_1$ und $A(Bv_2) = 3(Bv_2)$ und $Av_2 = Bv_2 + 3v_2$ sowie $Av_3 = 3v_3$. Für die Basiswechselmatrix

$$S \;:=\; (Bv_1, v_1, v_2, v_3) \;=\; \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gilt also

$$S^{-1}AS \;=\; \left(\begin{array}{c|cc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Dies ist die Jordansche Normalform von A.

2. Bestimme die Jordannormalform über $\mathbb{Q}$ der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir berechnen zuerst das charakteristische Polynom mittels Entwicklung nach der ersten Spalte:

$$
\begin{aligned}
\det(XI_4 - A) &= \begin{vmatrix} X+1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 1 & X & 0 \\ 2 & 0 & -1 & X-1 \end{vmatrix} \\
&= (X+1) \cdot \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ 1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X-1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ X & -1 & 0 \\ 1 & X & 0 \end{vmatrix} \\
&= (X+1)(X^2(X-1) + X - 1) - 2(-X^2 - 1) \\
&= X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2+1)^2
\end{aligned}
$$

Also ist das charakteristische Polynom $\mathrm{char}_A(X) = (X^2+1)^2$. Das Polynom $p := X^2 + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$ und hat Begleitmatrix $P := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Wir berechnen:

$$
p(A) = A^2 + I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

Somit ist $\dim \mathrm{Kern}(p(A)) = 2$. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton wissen wir, dass $p(A)^2 = 0$ und daher $\dim \mathrm{Kern}(p(A)^2) = 4$ ist. Nach Kapitel 9.5 der Vorlesung existiert daher kein Jordanblock der Grösse 2, sondern nur ein Block der Grösse 4. Daraus schliessen wir, dass die Jordannormalform von A gleich

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
$$

ist.

3. Sei B eine komplexe 5×5-Matrix mit dem Minimalpolynom $(X-3)(X+5)^2$ und dem charakteristischem Polynom $(X-3)^2(X+5)^3$. Bestimme die möglichen Jordanschen Normalformen von B.

   Lösung:

   Da B das charakteristische Polynom $(X-3)^2(X+5)^3$ besitzt, hat der Eigenwert 3 algebraische Vielfachheit 2 und der Eigenwert -5 algebraische Vielfachheit 3.

   Der Faktor $(X-3)$ tritt im Minimalpolynom mit der Potenz 1 auf; der grösste Jordan-Block zum Eigenwert 3 ist also ein 1×1-Block. Daher enthält die Jordan-Normalform genau 2 Jordanblöcke der Grösse 1×1 zum Eigenwert 3.

Der Faktor $(X + 5)$ tritt im Minimalpolynom mit der Potenz 2 auf; es existiert also ein Jordanblock zum Eigenwert -5 der Grösse 2×2. Aus Dimensionsgründen folgt, dass es genau einen weiteren Jordanblock der Grösse 1×1 gibt.

Für die Jordansche Normalform der Matrix B erhalten wir also bis auf Vertauschen der Jordanblöcke als einzige Möglichkeit

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

**4. Die Jordan-Normalform wird oft mit der Idee motiviert, dass die Matrix möglichst viele Nullen enthalten soll. Wird die Anzahl Nullen aber wirklich von der Jordan-Normalform maximiert? Umgekehrt gefragt: Gibt es eine quadratische Matrix A über einem Körper, die mehr Nullen enthält als ihre Jordannormalform J?

Lösung: Für eine nilpotente Matrix A stimmt die Aussage. Denn sei J ihre Jordannormalform mit k Jordanblöcken. Dann hat der Eigenraum $\mathrm{Eig}_0(A) = \mathrm{Kern}(L_A)$ die Dimension k, also hat A den Rang $n - k$. Daher hat A genau $n - k$ linear unabhängige Spalten, also auch mindestens $n - k$ von Null verschiedene Einträge. Dies ist aber genau die Anzahl der von Null verschiedenen Einträge von J, da jeder Jordanblock der Grösse m zum Eigenwert 0 genau $m - 1$ von Null verschiedene Einträge hat. Somit ist die Minimalität für nilpotente Matrizen gegeben.

Im Allgemeinen gilt die Aussage aber nicht. Ein Gegenbeispiel über $\mathbb{Q}$ ist:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hier ist A eine Blockdreiecksmatrix aus 2×2-Blöcken, bei der jeder Block das charakteristische Polynom $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ hat. Also hat A die Eigenwerte ± 1 jeweils mit arithmetischer Multiplizität 2. Eine direkte Rechnung zeigt aber, dass jeder Eigenwert die geometrische Multiplizität 1 hat. Daher hat A die angegebene Jordannormalform. Diese enthält 10 Nullen, gegenüber 11 Nullen in A.

Bemerkung: Auch wenn die Jordannormalform weniger Nullen hat als die ursprüngliche Matrix, werden die Rechnungen damit in der Regel trotzdem einfacher, weil die Haupträume nicht mehr durcheinander geworfen werden.

5. (a) Bestimme die Lösung des Systems von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + 9y(t) + 9z(t) \\ y'(t) &= 3x(t) - 6y(t) - 8z(t) \\ z'(t) &= -4x(t) + 11y(t) + 13z(t) \end{aligned}$$

zu der Anfangsbedingung $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.
Hinweis: Verwende die Jordansche Normalform.

(b) Bestimme die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung

$$f^{(3)}(t) - f^{(2)}(t) + f'(t) - f(t) = 0.$$

Hinweis: Schreibe die Gleichung als System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, und verwende die Jordansche Normalform.

Lösung: Für (a) setzen wir

$$v(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} -1 & 9 & 9 \\ 3 & -6 & -8 \\ -4 & 11 & 13 \end{pmatrix}, \qquad v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wonach das Gleichungssystem äquivalent ist zu

$$\frac{d}{dt}v(t) = A \cdot v(t) \quad \text{mit der Anfangsbedingung} \quad v(0) = v\,.$$

Nach §9.6 der Vorlesung ist die eindeutige Lösung $v(t) = \exp(At) \cdot v_0$.

Um diese explizit zu bestimmen, bringen wir A in Jordansche Normalform. Das charakteristische Polynom von A ist

$$\mathrm{char}_A(X) \;=\; X^3 - 6X^2 + 12X - 8 \;=\; (X-2)^3\,.$$

Für $B := A - 2I_3$ gilt

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 9 \\ 3 & -8 & -8 \\ -4 & 11 & 11 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

und $B^k = 0$ für alle $k \geqslant 3$. Wir wählen irgendeinen Vektor $w \in \mathbb{R}^3 \smallsetminus \mathrm{Kern}(B^2)$, zum Beispiel

$$w := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann bilden die Vektoren w, Bw, B^2w eine Basis von $\mathbb{R}^3$ und mit

$$S := (B^2w, Bw, w) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt die Darstellung von A in Jordanscher Normalform:

$$A = S \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot S^{-1}\,.$$

Aus der Lösung zu Aufgabe 1 der Serie 15 gilt nun für alle $k \geqslant 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 2^k & \binom{k}{1}2^{k-1} & \binom{k}{2}2^{k-2} \\ 0 & 2^k & \binom{k}{1}2^{k-1} \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die Exponentialreihe liefert dann

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} t\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k t^k = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix},$$

und somit

$$\begin{aligned} v(t) &= \exp(At) \cdot v_0 = S \cdot \exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} t\right) \cdot S^{-1}v \\ &= S \cdot \exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} t\right) \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \\ &= -S \cdot \left(e^{2t} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + te^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2e^{2t} \begin{pmatrix} [r]5/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + te^{2t} \begin{pmatrix} 15 \\ -13 \\ 18 \end{pmatrix} + t^2e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 5/2 \\ -5/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für (b) setzen wir

$$F(t) := \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

dann ist die Differentialgleichung der Aufgabe äquivalent zu

$$\frac{d}{dt}F(t) = A \cdot F(t)\,.$$

Die Lösung dieser Gleichung mit einem beliebigen Anfangswert

$$F(0) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = v_0$$

ist dann $F(t) = \exp(At) \cdot v_0$, und die allgemeine Lösung für $f(t)$ ist genau der erste Eintrag von $F(t)$.

Nun berechnen wir das charakteristische Polynom von A und finden

$$\mathrm{char}_A(X) \;=\; (X-1)(X^2+1)\,.$$

Also ist A eine 3×3-Matrix mit den 3 verschiedenen komplexen Eigenwerten 1 und $\pm i$ und daher diagonalisierbar über $\mathbb{C}$. Daher rechnen wir fürs Erste über $\mathbb{C}$ und reduzieren uns erst am Schluss wieder auf Werte in $\mathbb{R}$. Dafür schreiben wir $A = UJU^{-1}$ mit einer Matrix $U \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ und

$$J := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\exp(At) \cdot v_0 \;=\; \exp(U \cdot Jt \cdot U^{-1}) \cdot v_0 \;=\; U \cdot \exp(Jt) \cdot U^{-1} v_0.$$

Die Exponentialreihe können wir in die Diagonalmatrix Jt hineinziehen und erhalten

$$\exp(Jt) \;=\; \exp\left(\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & it & 0 \\ 0 & 0 & -it \end{pmatrix}\right) \;=\; \begin{pmatrix} \exp(t) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(it) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(-it) \end{pmatrix}).$$

Somit ist die erste Komponente von $\exp(At) \cdot v_0$ eine Linearkombination der Funktionen $\exp(t)$ und $\exp(\pm it)$ mit konstanten Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Wegen $\exp(\pm it) = \cos(t) \pm i \sin(t)$ ist dies äquivalenterweise eine Linearkombination der Funktionen $\exp(t)$, $\cos(t)$, und $\sin(t)$ mit konstanten Koeffizienten in $\mathbb{C}$. Damit die Funktion reelle Werte hat, müssen diese Koeffizienten in $\mathbb{R}$ liegen. Also hat jede reelle Lösung die Form

$$f(t) \;=\; ae^t + b\cos(t) + c\sin(t)$$

für Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$. Umgekehrt überprüfen wir durch direkte Rechnung, dass jede solche Funktion eine Lösung ist.

Aliter für (b): Durch Berechnen einer Jordanbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich A erhalten wir die Jordansche Normalform von A über $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Durch Induktion finden wir für alle $m \geqslant 0$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2m} = (-1)^k I_2 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2m+1} = (-1)^m \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die matrixwertige Exponentialfunktion liefert

$$\begin{aligned}
\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} t\right) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{2m+1} \\
&= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m}}{(2m)!}\right) \cdot I_2 + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m t^{2m+1}}{(2m+1)!}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \cos(t) \cdot I_2 + \sin(t) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Insgesamt zeigt dies

$$\begin{aligned}
\exp(At) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{e^t}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\cos(t)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin(t)}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung $f(t)$ ist die erste Komponente von $\exp(At) \cdot v_0$, also gleich

$$f(t) = \frac{1}{2}(x_1 + x_3)e^t + \frac{1}{2}(x_1 - x_3)\cos(t) + \frac{1}{2}(-x_1 + 2x_2 - x_3)\sin(t).$$

*6. Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix. Zeige

$$\det \exp(A) = \exp \operatorname{Spur}(A).$$

Lösung: Sei S eine invertierbare Matrix, so dass $S^{-1}AS$ Jordansche Normalform hat mit Jordanblöcken $J_1, \ldots, J_k$. Dann gilt

$$\det \exp(A) = \det \exp(S^{-1}AS) = \prod_{i=1}^{k} \det \exp(J_i) \qquad \text{und}$$

$$\exp \operatorname{Spur}(A) = \exp \operatorname{Spur}(S^{-1}AS) = \exp\left(\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Spur}(J_i)\right) = \prod_{i=1}^{k} \exp \operatorname{Spur}(J_i).$$

Es genügt daher die Aussage für einen beliebigen $n \times n$-Jordanblock der Form

$$J := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$ zu zeigen. Für diese Matrix ist $\mathrm{Spur}(J) = n\lambda$, und nach Aufgabe 1 der Serie 15 ist $\exp(J)$ eine obere Dreiecksmatrix mit Einträgen $\exp(\lambda)$ auf den Diagonalen. Wir erhalten also

$$\det(\exp(J)) = \exp(\lambda)^n = \exp(n\lambda) = \exp(\mathrm{Spur}(J)),$$

was zu zeigen war.

Aliter ohne Jordannormalform: Sei $\|\ \|$ die in Abschnitt 9.6 der Vorlesung eingeführte Matrixnorm. Wegen $\|A^k\| \leqslant \|A\|^k$ hat die matrixwertige Potenzreihe

$$\exp(tA) \ := \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k$$

den Konvergenzradius ∞. Nach denselben Argumenten wie in Analysis I und II stellt sie daher eine C^∞-Funktion von $t \in \mathbb{R}$ dar. Da die Determinante einer Matrix ein Polynom in den Koeffizienten ist, ist daher auch $g(t) := \det\exp(tA)$ eine C^∞-Funktion. Wir bestimmen deren Ableitung wie folgt.

Zunächst betrachte beliebige $t, h \in \mathbb{R}$. Dann kommutieren die Matrizen tA und hA; nach Abschnitt 9.7 gilt folglich $\exp(tA + hA) = \exp(tA)\exp(hA)$ und somit

$$(*) \qquad g(t+h) \ = \ \det\exp(tA+hA) \ = \ \det(\exp(tA)\exp(hA)) \ = \ g(t)g(h).$$

Andererseits folgt aus der absoluten Konvergenz

$$\exp(hA) \ = \ I_n + hA + O(h^2)$$

für $h \to 0$. Da die Determinante einer Matrix ein Polynom in den Koeffizienten ist, folgt daraus weiter

$$g(h) \ = \ \det(I_n + hA + O(h^2)) = \det(I_n + hA) + O(h^2)$$

Schreibe $A = (a_{ij})_{i,j}$. Da alle Einträge ausserhalb der Diagonalen von $I_n + hA$ durch h teilbar sind, liefert jede nichttriviale Permutation in der Definition der Determinante einen durch h^2 teilbaren Beitrag zu $\det(I_n + hA)$. Somit ist

$$g(h) \ = \ \prod_{i=1}^{n}(1 + ha_{ii}) + O(h^2) \ = \ 1 + h\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + O(h^2) \ = \ 1 + h\,\mathrm{Spur}(A) + O(h^2).$$

Aus $(*)$ folgt daher

$$g'(t) \ = \ \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \ = \ \lim_{h\to 0} g(t) \cdot \frac{g(h) - 1}{h} \ = \ g(t) \cdot \mathrm{Spur}(A).$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion $g(t)$. Diese erfüllt die Anfangsbedingung $g(0) = \det(I_n) = 1$, somit folgt $g(t) = \exp(t\,\mathrm{Spur}(A))$ für alle t. Einsetzen von $t = 1$ liefert nun $\det\exp(A) = g(1) = \exp\mathrm{Spur}(A)$, was zu zeigen war.

7. Konstruiere eine Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$, für welche die Einheitskugel

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$$

ein regelmässiges Sechseck ist.

Lösung: Identifiziere $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ und setze $\zeta := e^{2\pi i/3}$. Dann sind die beiden Abbildungen

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}, \quad z \mapsto \sum_{i=1}^{3} |\operatorname{Re}(\zeta^i z)|$$
$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}, \quad z \mapsto \max\{|\operatorname{Re}(\zeta^i z)| : 1 \leqslant i \leqslant 3\}$$

Normen mit der gesuchten Eigenschaft.

*8. *(Operatornorm)* Für je zwei normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume $(V, \|\ \|)$ und $(W, \|\ \|')$ und jeden Homomorphismus $f\colon V \to W$ setze

$$\|f\| \;:=\; \sup\left(\{0\} \cup \left\{ \frac{\|f(v)\|'}{\|v\|} \;\middle|\; 0 \neq v \in V \right\}\right).$$

Mit anderen Worten ist dies das kleinste Element $\|f\| \in \mathbb{R}^{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$, so dass

$$\|f(v)\| \leqslant \|v\| \cdot \|f\|$$

für alle $v \in V$. Zeige, dass dadurch genau dann eine Norm auf $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ definiert ist, wenn V endlich-dimensional oder $W = 0$ ist.

Lösung: Zuerst sei $W = 0$. Dann ist auch $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = 0$. Für die Nullabbildung $f = 0$ erhalten wir $\|0\| = 0$, und dies erfüllt automatisch die Axiome einer Norm.

Sodann sei $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ beliebig. Da f mit skalarer Multiplikation verträglich ist, gilt

$$\begin{aligned} \|f\| \;&=\; \sup\left\{ \left\| f\left(\frac{v}{\|v\|}\right)\right\|' \;:\; 0 \neq v \in V \right\} \\ &=\; \sup\big\{\|f(v)\|' \;:\; v \in V \text{ mit } \|v\| = 1\big\}. \end{aligned}$$

Ist nun V endlich-dimensional, so ist die Einheitskugel

$$\mathcal{B}_1 \;:=\; \big\{v \in V \;\big|\; \|v\| = 1\big\}$$

kompakt (siehe Analysis-Vorlesung) und die stetige Funktion $\|\cdot\|' \circ f : \mathcal{B}_1 \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ nimmt ein Maximum an. Nach Definition ist dieses gleich $\|f\|$. Also haben wir eine wohldefinierte Abbildung

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}, \; f \mapsto \|f\|.$$

Wir zeigen, dass diese die Axiome einer Norm erfüllt.

(i) *Separiertheit:* Für $f = 0$ gilt $\|f\| = 0$ nach Konstruktion. Sei umgekehrt $\|f\| = 0$. Nach der Definition von $\|f\|$ gilt dann für jedes $v \in V$

$$\|f(v)\|' \leqslant \|f\| \cdot \|v\| = 0.$$

Nach der Separiertheit von $\|\cdot\|'$ ist daher $f(v) = 0$. Somit ist $f = 0$.

(ii) *Multiplikativität:* Für alle $c \in \mathbb{R}$ und alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ gilt

$$\begin{aligned} \|cf\| &= \sup\left\{ \frac{\|cf(v)\|'}{\|v\|} \;\middle|\; 0 \neq v \in V \right\} \\ &= |c| \cdot \sup\left\{ \frac{\|f(v)\|'}{\|v\|} \;\middle|\; 0 \neq v \in V \right\} \\ &= |c| \cdot \|f\|. \end{aligned}$$

(iii) *Dreiecksungleichung:* Für alle $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ gilt

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \sup\left\{ \|f(v) + g(v)\|' \;:\; v \in V \text{ mit } \|v\| = 1 \right\} \\ &\leqslant \sup\left\{ \|f(v)\|' + \|g(v)\|' \;:\; v \in V \text{ mit } \|v\| = 1 \right\} \\ &\leqslant \sup\left\{ \|f(v)\|' \;:\; v \in V \text{ mit } \|v\| = 1 \right\} \\ &\quad + \sup\left\{ \|g(v)\|' \;:\; v \in V \text{ mit } \|v\| = 1 \right\} \\ &= \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Also ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$.

Schliesslich sei $W \neq 0$ und V unendlich-dimensional. Wähle einen Vektor $w_0 \in W$ mit $\|w_0\|' = 1$ und eine Basis $(e_i)_{i \in I}$ von V. Nach Ersetzen von e_i durch $e_i/\|e_i\|$ haben wir die Normalisierung $\|e_i\| = 1$ für alle i. Wähle ausserdem eine unbeschränkte Funktion $c\colon I \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ und betrachte die eindeutige lineare Abbildung $f\colon V \to W$ mit $f(e_i) = c(i) \cdot w_0$ für alle $i \in I$. Für jedes $i \in I$ gilt dann

$$c(i) \;=\; \|c(i) \cdot w_0\|' \;=\; \|f(e_i)\|' \;\leqslant\; \|f\| \cdot \|e_i\| \;=\; \|f\|.$$

Da c eine unbeschränkte Funktion ist, folgt daraus $\|f\| = \infty$. Also definiert die angegebene Formel keine Abbildung $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ und daher keine Norm.