Musterlösung Serie 18

Bilinearformen und Skalarprodukte

*1. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Zeige, dass die Norm genau dann von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V induziert wird, wenn sie für alle $x, y \in V$ die *Parallelogrammidentität*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

erfüllt.

Lösung: Im Fall $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\
\|x-y\|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2,
\end{aligned}$$

also ist

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,.$$

Sei umgekehrt $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, welche die Parallelogrammidentität erfüllt. Definiere

$$\langle x,y\rangle \;:=\; \frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big) \;=\; \frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\big),$$

wobei die letzte Gleichung aus der Parallelogrammidentität (PI) folgt. Diese Abbildung erfüllt $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ und $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle$ für alle $x,y \in V$. Da $\|\cdot\|$ bereits positiv definit ist, bleibt also nur noch zu zeigen, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilinear ist. Aufgrund der Symmetrie genügt es zu zeigen, dass die Abbildung linear in der ersten Variablen ist.

Für beliebige $x, x', y \in V$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\langle x+x', y\rangle &= \frac{1}{4}(\|(x+y)+x'\|^2 - \|x+x'-y\|^2) \\
&\overset{\text{(PI)}}{=} \frac{1}{4}(2\|x+y\|^2 + 2\|x'\|^2 - \|x+y-x'\|^2 - \|x+x'-y\|^2) \\
&\overset{\text{(PI)}}{=} \frac{1}{4}(2\|x+y\|^2 + 2\|x'\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|x'-y\|^2) \\
&= \frac{1}{4}(2\|x+y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|x'\|^2 + 4\|x'\|^2 - 2\|x'-y\|^2) \\
&\overset{\text{(PI)}}{=} \frac{1}{4}(2\|x+y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|x'\|^2 + 2\|x'+y\|^2 - 4\|y\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 + \|x'+y\|^2 - \|x'\|^2 - \|y\|^2) \\
&= \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle.
\end{aligned}$$

Also ist die Abbildung additiv in der ersten Variablen. Das Verhalten unter skalarer Multiplikation können wir nur indirekt erschliessen. Zunächst zeigen wir die folgenden Aussagen für alle $n \in \mathbb{Z}^{>0}$ und alle $x, y \in V$:

(i) Wegen
$$0 = \langle 0, y\rangle = \langle x + (-x), y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle -x, y\rangle$$
gilt $\langle -x, y\rangle = -\langle x, y\rangle$.

(ii) Aus der Additivität folgt durch Induktion $\langle nx, y\rangle = n\langle x, y\rangle$.

(iii) Aus (ii) mit $\frac{1}{n}x$ anstelle von x folgt
$$\langle x, y\rangle = \langle n\frac{1}{n}x, y\rangle = n\langle \frac{1}{n}x, y\rangle,$$
und daher $\langle \frac{1}{n}x, y\rangle = \frac{1}{n}\langle x, y\rangle$.

Aus allen drei Aussagen zusammen folgt nun
$$\langle \frac{p}{q} \cdot x, y\rangle = \frac{p}{q} \cdot \langle x, y\rangle$$
für alle $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ und alle $x, y \in V$.

Nun fixieren wir beliebige $x, y \in V$. Der von diesen erzeugte Unterraum U ist dann isomorph zu $\mathbb{R}^n$ für ein $n \leqslant 2$. Die Einschränkung von $\|\cdot\|$ auf U ist wieder eine Norm und entspricht daher einer Norm auf $\mathbb{R}^n$. Wie in der Vorlesung erklärt, ist diese Norm nun aber eine Lipschitz-stetige Funktion auf $\mathbb{R}^n$. Insbesondere ist sie also stetig. Daraus folgt, dass auch die Einschränkung von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf $U \times U$ einer stetigen Funktion auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ entspricht. Dies impliziert wiederum, dass die Funktion
$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \langle tx, y\rangle - t\langle x, y\rangle$$

stetig ist. Nun zeigt aber die obige Gleichung, dass diese Funktion auf $\mathbb{Q}$ verschwindet. Da sie stetig ist, verschwindet sie daher auf ganz $\mathbb{R}$. Es gilt also

$$\langle tx, y\rangle = t\langle x, y\rangle$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Also ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ linear in der ersten Variable, und wir sind fertig.

2. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist für $x = \binom{x_1}{x_2}$ und $y = \binom{y_1}{y_2}$ durch

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + ax_1y_2 + ax_2y_1 + 7x_2y_2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert?

Lösung: Man prüft direkt, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ ist; nämlich mit der symmetrischen Darstellungsmatrix $\left(\begin{smallmatrix}1 & a\\ a & 7\end{smallmatrix}\right)$. Sodann berechnen wir:

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= x_1^2 + 2ax_1x_2 + 7x_2^2\\ &= x_1^2 + 2ax_1x_2 + a^2x_2^2 - a^2x_2^2 + 7x_2^2\\ &= (x_1 + ax_2)^2 + (7 - a^2)x_2^2.\end{aligned}$$

Ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit, so folgt mit $x = \binom{-a}{1} \neq 0$, dass $7 - a^2 > 0$ sein muss; also $|a| < \sqrt{7}$. Ist umgekehrt $|a| < \sqrt{7}$, so gilt wegen der obigen Rechnung $\langle x, x\rangle > 0$ für alle $x \neq 0$ und daher ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit. Somit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt ist genau dann, wenn $|a| < \sqrt{7}$ gilt.

3. Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant n$.

   (a) Zeige, dass durch

   $$\langle p, q\rangle := \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t}\,dt$$

   ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

   (b) Bestimme die Matrix des Skalarprodukts bezüglich der Basis $1, x, \ldots, x^n$.

Lösung:

(a) Zunächst wissen wir aus der Analysis, dass das uneigentliche Integral konvergiert. Sodann zeigt man direkt aus den Linearitätseigenschaften des Integrals, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Bilinearform ist. Offensichtlich ist sie symmetrisch. Sei nun $p \in V \smallsetminus \{0\}$ beliebig. Wähle einen Punkt $x_0 > 0$ mit $p(x_0) \neq 0$. Da p eine stetige Funktion induziert, gilt dann $|p(x)| \geqslant c := \frac{1}{2}|p(x_0)| > 0$ auf einem ganzen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ mit $x_0 \in [a, b]$. Da die Funktion $t \mapsto e^{-t}$ streng monoton fallend und $e^{-t} > 0$ für alle t ist, folgt

$$\langle p, p\rangle \;=\; \int_0^\infty p(t)^2e^{-t}\,dt \;\geqslant\; \int_a^b p(t)^2e^{-t}\,dt \;\geqslant\; c\cdot e^{-b}\cdot(b-a) \;>\; 0.$$

Damit ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit und daher ein Skalarprodukt.

(b) Für alle $k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ sei

$$a(k) := \int_0^\infty t^k e^{-t}\, dt.$$

Dann ist

$$a(0) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = 1,$$

und für $k \geqslant 1$ gilt nach partieller Integration

$$a(k) = \int_0^\infty t^k e^{-t}\, dt = -t^k e^{-t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty k t^{k-1}(-e^{-t})\, dt = k \cdot a(k-1).$$

Durch Induktion über k folgt daraus $a(k) = k!$. Sei schliesslich $A := (a_{ij})_{i,j}$ die Darstellungsmatrix des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezüglich der geordneten Basis $(1, x, \ldots, x^n)$. Dann ist

$$a_{ij} = \langle x^{i-1}, x^{j-1} \rangle = a(i+j-2) = (i+j-2)!\,.$$

4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeige:

(a) Die Matrix $A^T A$ ist symmetrisch.

(b) Die Matrix $A^T A$ ist positiv definit genau dann, wenn A invertierbar ist.

(c) Es gilt $\mathrm{Rang}(A^T A) = \mathrm{Rang}(A)$.

Lösung: Aussage (a) folgt aus der Rechnung $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$.

Für den Rest berechnen wir zur Vorbereitung für jedes $v \in \mathbb{R}^n$

$$(*) \qquad v^T \cdot (A^T A) \cdot v \;=\; (v^T A^T) \cdot Av \;=\; (Av)^T Av \;=\; \|Av\|^2,$$

wobei $\|\ \|$ die übliche euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist.

Ist nun A invertierbar, so folgt $Av \neq 0$ und somit $v^T \cdot (A^T A) \cdot v = \|Av\|^2 > 0$; also ist $A^T A$ positiv definit. Ist umgekehrt $A^T A$ positiv definit, so folgt $\|Av\|^2 = v^T \cdot (A^T A) \cdot v > 0$ und daraus $Av \neq 0$. Also hat die lineare Abbildung $L_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto Av$ den Kern Null, und daher ist A invertierbar. Damit ist (b) bewiesen.

Für (c) behaupten wir zunächst: $\mathrm{Kern}(L_A) = \mathrm{Kern}(L_{A^T A})$.

Beweis: Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ mit $Av = 0$ gilt auch $A^T Av = A^T 0 = 0$; also haben wir die Inklusion „$\subset$“. Umgekehrt sei $A^T Av = 0$. Aus $(*)$ folgt dann $\|Av\|^2 = v^T \cdot (A^T A) \cdot v = v^T 0 = 0$. Da die euklidische Norm positiv definit ist, folgt daraus $Av = 0$, also $v \in \mathrm{Kern}(L_A)$. Dies zeigt die Inklusion „$\supset$“, und wir sind fertig. *q.e.d.*

Aus der Behauptung folgt schliesslich

$$\begin{aligned} \mathrm{Rang}(A) &= \dim \mathrm{Bild}(L_A) \;=\; n - \dim \mathrm{Kern}(L_A) \\ &= n - \dim \mathrm{Kern}(L_{A^T A}) \;=\; \dim \mathrm{Bild}(L_{A^T A}) \;=\; \mathrm{Rang}(A^T A). \end{aligned}$$

5. Zeige, dass durch $\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A^T B)$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definiert ist, und finde eine Orthonormalbasis dazu.

   Lösung: Die Grundregeln der Matrixmultiplikation implizieren, dass die Abbildung $(A, B) \mapsto A^T B$ bilinear ist. Da die Spurabbildung linear ist, ist die angegebene Abbildung also bilinear. Wegen

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{Spur}(A^T B) = \mathrm{Spur}((A^T B)^T) = \mathrm{Spur}(B^T (A^T)^T) = \mathrm{Spur}(B^T A) = \langle B, A\rangle$$

   ist sie ausserdem symmetrisch. Sodann schreiben wir $A = (v_1, \ldots, v_n)$ mit Spaltenvektoren v_i. Dann ist A^T die Matrix mit den Zeilen $v_1^T, \ldots, v_n^T$ und folglich

$$A^T A \;=\; \big(v_i^T v_j\big)_{i,j=1,..,n}.$$

   Die Spur ist definiert als die Summe der Diagonaleinträge; darum gilt also

$$\langle A, A\rangle \;=\; \mathrm{Spur}(A^T A) \;=\; \sum_{i=1}^{n} v_i^T v_i.$$

   Hier ist jeder Summand $v_i^T v_i$ das Betragsquadrat von v_i bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^n$ und folglich $\geqslant 0$. Also ist $\langle A, A\rangle \geqslant 0$. Für $A \neq 0$ ist ausserdem mindestens ein $v_i \neq 0$, also mindestens ein Summand > 0 und daher $\langle A, A\rangle > 0$. Somit ist $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ein Skalarprodukt.

   Offenbar ist die Menge aller $n \times n$-Elementarmatrizen eine Basis von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Durch direkte Rechnung verifizieren wir

$$\langle E_{ij}, E_{k\ell}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j) = (k, \ell), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

   also ist dies eine Orthonormalbasis.

   Aliter: Wir identifizieren $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{R}^{n^2}$, indem wir die Koeffizienten einer Matrix in irgendeiner fest gewählten Reihenfolge auflisten. Dies ist ein Vektorraum-Isomorphismus. Für zwei $n \times n$-Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j}$ und $B = (b_{ij})_{i,j}$ zeigt nun eine direkte Rechnung die Gleichung

$$\langle A, B\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}.$$

   Über den genannten Isomorphismus entspricht $\langle \cdot, \cdot\rangle$ also dem Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n^2}$; somit ist auch diese ein Skalarprodukt. Ausserdem entsprechen die $n \times n$-Elementarmatrizen genau den Standardbasisvektoren von $\mathbb{R}^{n^2}$; und da diese eine Orthonormalbasis für das Standardskalarprodukt bilden, gilt das Entsprechende für die $n \times n$-Elementarmatrizen.

**6. Zeige, dass es einen euklidischen Vektorraum gibt, der keine Orthonormalbasis besitzt.

Hinweis: Untersuche einen Hilbertraum, und beachte, dass wir hier nicht von einer Hilbertraumbasis sprechen, sondern von einer Basis im Sinn der linearen Algebra.

Lösung: Sei H ein unendlich-dimensionaler Hilbertraum und B eine Orthonormalbasis. Wähle paarweise verschiedene Basisvektoren $b_1, b_2, \ldots \in B$. Aufgrund der Vollständigkeit von H und dem Majorantenkriterium für die Konvergenz existiert dann der Vektor $v := \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} b_n \in H$. Da B eine Basis von H ist, ist dann $v = \sum'_{b\in B} \alpha_b b$ mit Skalaren $\alpha_b \in \mathbb{R}$, von denen höchstens endlich viele ungleich Null sind. Für jedes $b \in \mathbb{R}$ ist dann

$$\langle b, v\rangle \;=\; \langle b, {\sum_{b'\in B}}' \alpha_{b'} b'\rangle \;=\; {\sum_{b'\in B}}' \alpha_{b'} \langle b, b'\rangle \;=\; \alpha_b.$$

Andererseits folgt aus der Konstruktion von v für jedes $m \geqslant 1$

$$\langle b_m, v\rangle \;=\; \langle b_m, \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} b_n\rangle \;=\; \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \langle b_m, b_n\rangle \;=\; \frac{1}{m^2}.$$

Somit sind die unendlich vielen Koeffizienten $\alpha_{b_m} = \frac{1}{m^2}$ ungleich Null; Widerspruch.

7. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine Bilinearform β auf V heisst ...

- *symmetrisch* wenn gilt $\forall\, v, w \in V\colon \beta(v,w) = \beta(w,v)$,
- *antisymmetrisch* wenn gilt $\forall\, v, w \in V\colon \beta(v,w) = -\beta(w,v)$,
- *alternierend* wenn gilt $\forall\, v \in V\colon \beta(v,v) = 0$.

Zeige:

(a) Jede alternierende Bilinearform ist antisymmetrisch.

(b) Ist $2 \neq 0$ in K, so ist jede antisymmetrische Bilinearform alternierend.

(c) Ist $2 \neq 0$ in K, so ist jede Bilinearform auf eindeutige Weise die Summe einer symmetrischen und einer alternierenden Bilinearform.

(d) Gib ein Beispiel einer antisymmetrischen, nicht alternierenden Bilinearform.

Lösung:

(a) Ist β alternierend, so gilt für alle $v, w \in V$:

$$0 = \beta(v+w, v+w) = \beta(v,v) + \beta(v,w) + \beta(w,v) + \beta(w,w) = \beta(v,w) + \beta(w,v).$$

Also ist β antisymmetrisch.

(b) Ist β antisymmetrisch, so gilt $\beta(v,v) = -\beta(v,v)$ und folglich $2\beta(v,v) = 0$ für alle $v \in V$. Falls $2 \neq 0$ ist, folgt $\beta(v,v) = 0$, also ist β alternierend.

(c) Sei $\beta\colon V \times V \to K$ eine beliebige Bilinearform. Definiere Abbildungen β_s, $\beta_a\colon V \times V \to K$ durch

$$\begin{aligned} \beta_s(v,w) &:= \tfrac{1}{2}\left(\beta(v,w) + \beta(w,v)\right), \\ \beta_a(v,w) &:= \tfrac{1}{2}\left(\beta(v,w) - \beta(w,v)\right). \end{aligned}$$

Direkte Rechnung zeigt, dass β_s und β_a wieder bilinear sind, dass β_s symmetrisch und β_a alternierend ist, und dass $\beta = \beta_s + \beta_a$ ist.

Angenommen $\beta = \tilde{\beta}_s + \tilde{\beta}_a$ ist eine weitere Zerlegung in eine symmetrische Bilinearform $\tilde{\beta}_s$ und eine alternierende Bilinearform $\tilde{\beta}_a$. Für alle $v, w \in V$ gilt dann

$$\begin{aligned} \beta(v,w) &= \tilde{\beta}_s(v,w) + \tilde{\beta}_a(v,w) = \beta_s(v,w) + \beta_a(v,w), \\ \beta(w,v) &= \tilde{\beta}_s(v,w) - \tilde{\beta}_a(v,w) = \beta_s(v,w) - \beta_a(v,w), \end{aligned}$$

und nach Addition beider Gleichungen auch

$$2\tilde{\beta}_s(v,w) = 2\beta_s(v,w).$$

Wegen $2 \neq 0$ folgt $\tilde{\beta}_s = \beta_s$ und mit $\tilde{\beta}_s + \tilde{\beta}_a = \beta = \beta_s + \beta_a$ dann auch $\tilde{\beta}_a = \beta_a$.

(d) Nach (b) setzt ein solches Beispiel voraus, dass $2 = 0$ ist in K. Nehmen wir einen solchen Körper (zum Beispiel $\mathbb{F}_2$) und den Vektorraum K^n für $n \geqslant 1$ mit der Bilinearform $\beta(x,y) := x^T y$. Diese ist symmetrisch, und wegen der Gleichung $-1 = 1$ in K daher auch antisymmetrisch! Für jeden Standardbasisvektor e_i gilt aber $\beta(e_i, e_i) = e_i^T e_i = 1 \neq 0$. Somit ist β nicht alternierend.

*8. Sei β eine alternierende Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen K-Vektorraum V. Wir nehmen an, dass β *nicht-ausgeartet* ist, das heisst, dass gilt:

$$\forall\, v \in V \smallsetminus \{0\}\ \exists\, v' \in V\colon \beta(v,v') \neq 0.$$

Wie im euklidischen Fall ist das *orthogonale Komplement* eines Unterraums $U \subset V$ definiert als

$$U^\perp \ := \ \bigl\{ v \in V \bigm| \forall u \in U\colon \beta(v,u) = 0 \bigr\}.$$

Ein Unterraum U mit $U \subset U^\perp$ heisst *isotrop (bezüglich β)*. Zeige:

(a) Für jeden Unterraum U ist $U^\perp$ ein Unterraum.

(b) Für jeden Unterraum U gilt $\dim_K V = \dim_K U + \dim_K U^\perp$.

(c) Für jeden maximalen isotropen Unterraum U gilt $U = U^\perp$.

(d) Jeder isotrope Unterraum ist in einem maximalen isotropen Unterraum enthalten.

(e) Es existiert eine geordnete Basis B von V, bezüglich welcher β die Darstellungsmatrix

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt. Insbesondere ist $\dim(V) = 2n$ gerade.

Lösung:

(a) Der Beweis geht genauso wie im euklidischen Fall. Oder man zeigt zuerst (b), wo $U^\perp$ sich als Kern einer linearen Abbildung herausstellt und schon deshalb ein Unterraum ist.

(b) Betrachte zuerst die lineare Abbildung

$$\delta\colon V \to V^\vee = \mathrm{Hom}_K(V,K), \quad v \mapsto \big(v' \mapsto \beta(v,v')\big).$$

Dass β nichtausgeartet ist, bedeutet, dass δ injektiv ist. Wegen $\dim_K(V^\vee) = \dim_K(V) < \infty$ ist δ daher bijektiv. Sodann betrachte die Abbildung

$$r\colon V^\vee \to U^\vee, \quad \ell \mapsto \ell|_U.$$

Da jede Linearform auf U eine Fortsetzung zu einer Linearform auf V besitzt, ist r surjektiv. Also ist die zusammengesetzte lineare Abbildung

$$(*) \qquad r \circ \delta\colon V \to U^\vee = \mathrm{Hom}_K(U,K), \quad v \mapsto \big(u \mapsto \beta(v,u)\big)$$

ebenfalls surjektiv. Nach Definition ist ihr Kern genau $U^\perp$. Aus der Dimensionsformel für Kern und Bild folgt nun

$$\begin{aligned} \dim_K V &= \dim_K \mathrm{Kern}(r\circ\delta) + \dim_K \mathrm{Bild}(r\circ\delta) \\ &= \dim_K U^\perp + \dim_K U^\vee \\ &= \dim_K U^\perp + \dim_K U. \end{aligned}$$

(c) Nach Definition ist ein Unterraum U isotrop genau dann, wenn gilt:

$$\forall\, u,u' \in U\colon \beta(u,u') = 0.$$

Sei nun U ein beliebiger isotroper Unterraum mit $U \neq U^\perp$. Wegen $U \subset U^\perp$ existiert dann ein Vektor $v \in U^\perp \smallsetminus U$. Wir behaupten, dass dann auch $U + \langle v\rangle$ isotrop ist. Nach obiger Äquivalenz ist dies gleichbedeutend mit

$$\forall\, u,u' \in U\ \forall \lambda,\lambda' \in K\colon \beta(u+\lambda v, u'+\lambda' v) = 0.$$

Da U isotrop ist, gilt dabei schon $\beta(u,u') = 0$. Wegen $v \in U^\perp$ gilt weiter $\beta(v,u) = \beta(v,u') = 0$. Da β alternierend ist, ist es auch antisymmetrisch nach Aufgabe 7; somit folgt $\beta(u,v) = -\beta(v,u) = -0 = 0$. Da β alternierend ist gilt ausserdem $\beta(v,v) = 0$. Wegen der Bilinearität von β folgt aus alledem

$$\beta(u+\lambda v, u'+\lambda' v) \;=\; \beta(u,u') + \lambda\beta(v,u') + \lambda'\beta(u,v) + \lambda\lambda'\beta(v,v) \;=\; 0,$$

wie gewünscht.

Die gerade bewiesene Behauptung zeigt, dass ein isotroper Unterraum U mit $U \neq U^\perp$ jedenfalls nicht maximal isotrop ist. Umgekehrt gilt damit für jeden maximalen isotropen Unterraum $U = U^\perp$, wie zu zeigen war.

(d) Für jeden isotropen Unterraum U betrachte die Menge aller isotropen Unterräume, die U enthalten. Da U selbst in dieser Menge ist, ist diese Menge nicht leer. Da ausserdem V endlich-dimensional ist, können wir in dieser Menge einen Unterraum maximaler Dimension wählen. Dieser ist dann offenbar maximal isotrop.

(e) Wir beweisen die Aussage durch Induktion über $\dim(V)$. Für $V = 0$ ist β dargestellt durch die leere Matrix $(\;)$ und die Aussage richtig. Sei also $V \neq 0$ und die Aussage gültig in jeder kleineren Dimension.

Sei $x_1 \in V$ ein beliebiger nicht-verschwindender Vektor. Da β nicht ausgeartet ist, existiert ein $y_1 \in V$ mit $\beta(x_1,y_1) = 1$. Wegen $\beta(x_1,x_1) = 0$ kann dann y_1 kein skalares Vielfaches von x_1 sein; also ist $U := \langle x_1, y_1\rangle$ ein Unterraum der Dimension 2.

Behauptung 1. Es gilt $V = U \oplus U^\perp$ und die zugehörige Projektionsabbildung auf den ersten Summanden ist die lineare Abbildung

$$P\colon V \to U,\; v \mapsto \beta(v,y_1)x_1 - \beta(v,x_1)y_1\,.$$

Beweis. Wegen der Linearität von β in der ersten Variablen ist P eine lineare Abbildung. Da x_1, y_1 linear unabhängig sind, gilt

$$\mathrm{Kern}(P) \;=\; \big\{v \in V \mid \beta(v,y_1) = 0 \,\wedge\, \beta(v,x_1) = 0\big\} \;=\; U^\perp.$$

Sodann berechnen wir $P(x_1) = x_1$ und $P(y_1) = y_1$. Dies zeigt, dass $P|U$ die Identität ist. Wegen $\mathrm{Bild}(P) \subset U$ folgt daraus $\mathrm{Bild}(P) = U$ und $P^2 = P$, somit ist P idempotent. Nach Serie 8, Aufgabe 5 gilt damit

$$V \;=\; \mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P) \;=\; U^\perp \oplus U,$$

wie gewünscht. □

Behauptung 2. Die Einschränkung von β auf $U^\perp \times U^\perp$ ist wieder eine nicht-ausgeartete alternierende Bilinearform.

Beweis. Durch direktes Überprüfen der Axiome sieht man, dass die Einschränkung jeder alternierenden Bilinearform auf jeden Unterraum wieder eine alternierende Bilinearform ist. Es geht also nur noch darum, ob die Einschränkung wieder nicht-ausgeartet ist. Betrachte dafür ein beliebiges $v \in U^\perp \smallsetminus \{0\}$. Da β nicht-ausgeartet ist, existiert dann ein $w \in V$ mit $\beta(v,w) \neq 0$. Dann ist $w' := w - P(w) \in U^\perp$, und wegen $v \in U^\perp$ und $P(w) \in U$ gilt

$$\beta(v,w') \;=\; \beta(v, w - P(w)) \;=\; \beta(v,w) - \beta(v, P(w)) \;=\; \beta(v,w) - 0 \;\neq\; 0.$$

Also ist die Einschränkung von β nicht-ausgeartet. □

Ende des Beweises. Wegen Behauptung 2 und der Induktionsannahme existiert erstens eine Basis $x_2, \ldots, x_n, y_2, \ldots, y_n$ von $U^\perp$ bezüglich welcher die Einschränkung von β die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ -I_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$ besitzt.
Zweitens ist β alternierend und somit antisymmetrisch; die Konstruktion von x_1 und y_1 impliziert somit $\beta(x_1,x_1) = \beta(y_1,y_1) = 0$ und $\beta(x_1,y_1) = -\beta(y_1,x_1) = 1$. Also ist (x_1,y_1) eine Basis von U, bezüglich welcher die Einschränkgung von β auf $U \times U$ die Darstellungsmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat.
Drittens gilt nach Konstruktion $\beta(u',u) = 0$ für alle $u \in U$ und $u' \in U^\perp$, und wegen der Antisymmetrie von β folglich auch $\beta(u,u') = 0$.
Schliesslich folgt aus Behauptung 1, dass

$$B := (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

eine Basis von V ist. Durch Zusammensetzen aller obigen Informationen folgt, dass die Darstellungsmatrix von β bezüglich B die gewünschte Gestalt

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt.