D-MATH
Prof. Richard Pink

Lineare Algebra II

FS 2022

Musterlösung Serie 19

Orthogonalität

1. Betrachte den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle = \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t}dt.$$

   (a) Zeige, dass es eine eindeutige Orthonormalbasis $p_0, p_1, p_2, \ldots$ von $\mathbb{R}[X]$ gibt, so dass $\deg(p_n) = n$ ist und der Leitkoeffizient jedes p_n positiv ist.

   (b) Gib p_0, p_1, p_2 explizit an.

Lösung:

   (a) Für jedes $n \geqslant 0$ setze $q_n := X^n$. Dann ist $q_0, q_1, q_2, \ldots$ eine Basis von $\mathbb{R}[X]$. Die Bedingung an die p_n bedeutet

$$p_n \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_{in} q_i$$

mit $a_{in} \in \mathbb{R}$ und $a_{nn} > 0$. Nach Gram-Schmidt, angewendet auf $(q_0, \ldots, q_n)$ für jedes $n \geqslant 0$, existiert ein eindeutiges Orthonormalsystem $p_0, p_1, \ldots$ mit diesen Eigenschaften. Dabei ist $\langle q_0, \ldots, q_n\rangle = \langle p_0, \ldots, p_n\rangle$ für jedes n und somit $p_0, p_1, \ldots$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}[X]$. Als Orthonormalsystem ist es ausserdem linear unabhängig. Also ist es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Mit partieller Integration beweist man durch Induktion die Formel

$$\int_0^\infty t^m e^{-t}dt \;=\; m!$$

für alle $m \geqslant 0$. Für jedes Polynom $p(X) = \sum_{m=0}^n a_m X^m \in \mathbb{R}[X]$ folgt daraus

$$\int_0^\infty p(t)e^{-t}dt \;=\; \sum_{m=0}^{n} a_m \cdot m!.$$

Der Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsprozess für $(q_0, q_1, q_2) = (1, X, X^2)$ ergibt das Orthonormalsystem (p_0, p_1, p_2) mit

$$\begin{aligned}
\|q_0\|^2 &= \int_0^\infty 1 \cdot e^{-t} dt \;=\; 1 \\
p_0 &:= \frac{q_0}{\|q_0\|} \;=\; 1 \\
\langle p_0, q_1 \rangle &= \int_0^\infty 1 \cdot t \cdot e^{-t} dt \;=\; 1 \\
\tilde{p}_1 &= q_1 - \langle p_0, q_1 \rangle p_0 \;=\; X - 1 \\
\|\tilde{p}_1\|^2 &= \int_0^\infty (t-1)^2 e^{-t} dt \;=\; 1 \\
p_1 &:= \frac{\tilde{p}_1}{\|\tilde{p}_1\|} \;=\; X - 1 \\
\langle p_0, q_2 \rangle &= \int_0^\infty 1 \cdot t^2 \cdot e^{-t} dt \;=\; 2 \\
\langle p_1, q_2 \rangle &= \int_0^\infty (t-1) \cdot t^2 \cdot e^{-t} dt \;=\; 4 \\
\tilde{p}_2 &= q_2 - \langle p_0, q_2 \rangle p_0 - \langle p_1, q_2 \rangle p_1 \;=\; X^2 - 2 - 4(X-1) = X^2 - 4X + 2 \\
\|\tilde{p}_2\|^2 &= \int_0^\infty (t^2 - 4t + 2)^2 e^{-t} dt \;=\; 4 \\
p_2 &:= \frac{\tilde{p}_2}{\|\tilde{p}_2\|} \;=\; \frac{1}{2} X^2 - 2X + 1
\end{aligned}$$

2. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $v_1 = (1, 1, 1)^T$ und $v_2 = (0, 2, 1)^T$.

   (a) Bestimme je eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.

   (b) Berechne die Darstellungsmatrizen der orthogonalen Projektionen $\mathbb{R}^3 \to U$ und $\mathbb{R}^3 \to U^\perp$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der jeweiligen Basis aus (a).

   Lösung:

   (a) Ein einfacher Weg, Orthonormalbasen von U und $U^\perp$ gleichzeitig zu bestimmen, ist die Anwendung der Gram-Schmidt-Orthonormalisierung auf die Vektoren v_1, v_2 sowie einen zusätzlichen Vektor $v_3 \in \mathbb{R}^3$, der die beiden zu einer Basis ergänzt, beispielsweise $v_3 = (1, 0, 0)^T$. Man erhält damit

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Also ist (w_1, w_2) eine Orthonormalbasis von U und w_3 eine von U^T.

Alternativ ermittelt man mit Gram-Schmidt für die Vektoren (v_1, v_2) eine Orthonormalbasis (w_1, w_2) von U, und löst unabhängig davon das lineare Gleichungssystem $\langle v_1, w\rangle = \langle v_2, w\rangle = 0$ um einen Basisvektor u' von U^T zu bestimmen, so dass dann $w_3 := u'/\|u'\|$ eine Orthonormalbasis von U^T ist.

(b) Die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf U ist gegeben durch die Formel

$$v \mapsto \langle w_1, v\rangle w_1 + \langle w_2, v\rangle w_2.$$

Ihre Darstellungsmatrix bezüglich der Standardbasis (e_1, e_2, e_3) von $\mathbb{R}^3$ und der Basis (w_1, w_2) von U ist gleich

$$\big(\langle e_j, w_i\rangle\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 2\\ 1\leqslant j\leqslant 3}} = (w_1, w_2)^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Analog erhält man für die orthogonale Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf $U^\perp$ die Matrix

$$\big(\langle e_j, w_3\rangle\big)_{1\leqslant j\leqslant 3} = w_3^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

3. Berechne eine Zerlegung $A = QR$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

in eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R. Verwende diese Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, 3, -3)^T$ zu lösen.

Lösung: Mit dem Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren findet man die gesuchten Matrizen

$$Q = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Multiplikation der Gleichung $Ax = QRx = b$ von links mit der invertierbaren Matrix $Q^{-1} = Q^T$ erhält man das äquivalente Gleichungssystem $Rx = Q^Tb = (4, 1, -1)^T$. Da R obere Dreiecksgestalt hat, erhält man hieraus schnell die Lösung $x = (2, 1, -1)^T$.

4. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Bestimme das n-dimensionale Volumen des von den Vektoren

$$e_1 + e_2,\ e_2 + e_3,\ \ldots\ ,\ e_{n-1} + e_n,\ e_n + e_1$$

aufgespannten Parallelotops

(a) ... im Fall $n = 3$.

*(b) ... für beliebiges $n \geqslant 3$.

Lösung: Schreibe $v_i := e_i + e_{i+1}$ für $1 \leqslant i < n$ und $v_n := e_n + e_1$. Dann ist

$$\langle v_i, v_j \rangle \;=\; \begin{cases} 2 & \text{falls } i = j, \\ 1 & \text{falls } |i-j| = 1, \\ 1 & \text{falls } |i-j| = n-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Gramsche Matrix zu den Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ ist daher

$$G \;:=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nach §10.11 der Vorlesung ist das gesuchte Volumen $\sqrt{\det(G)}$.

(a) Für $n = 3$ ist

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit $\det(G) = 4$; also ist das Volumen gleich 2.

(b) Für $n \geqslant 3$ beliebig betrachten wir die Permutationsmatrix

$$N \;:=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad N^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $G = 2 \cdot I_n + N + N^{-1}$. Nun ist N über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar und die Vektoren

$$v_\zeta \;:=\; \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta \\ \zeta^2 \\ \vdots \\ \zeta^{n-1} \end{pmatrix}$$

für alle $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\zeta^n = 1$ bilden eine Basis aus Eigenvektoren von N mit $Nv_\zeta = \zeta v_\zeta$. Folglich gilt auch $N^{-1}v_\zeta = \zeta^{-1}v_\zeta$ und damit $Gv_\zeta = (2 + \zeta + \zeta^{-1}) \cdot v_\zeta$. Daher ist

$$\begin{aligned} \det(G) &= \prod_{\zeta^n=1} (2 + \zeta + \zeta^{-1}) \;=\; \prod_{\zeta^n=1} (1+\zeta)(1+\zeta^{-1}) \\ &= \Big(\prod_{\zeta^n=1} (1+\zeta)\Big) \cdot \Big(\prod_{\zeta^n=1} (1+\zeta^{-1})\Big) \;=\; \Big(\prod_{\zeta^n=1} (1+\zeta)\Big)^2. \end{aligned}$$

Für jede Variable X gilt nun aber

$$\prod_{\zeta^n=1} (1 - \zeta X) \;=\; 1 - X^n.$$

Einsetzen von $X = -1$ liefert daher

$$\prod_{\zeta^n=1} (1+\zeta) \;=\; 1 - (-1)^n \;=\; \begin{cases} 2 & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Das gesuchte Volumen ist also

$$\sqrt{\det(G)} \;=\; \begin{cases} 2 & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}.$$

Bemerkung: Dass für n gerade das Volumen gleich 0 ist, kann man auch daraus ersehen, dass in diesem Fall die Gleichung $v_1 - v_2 + v_3 - \ldots - v_n = 0$ gilt, die Vektoren also linear abhängig sind.

5. Für einen endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ betrachte den Isomorphismus

$$\delta\colon V \to V^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}),\ v \mapsto \delta(v) := \langle v, \cdot \rangle.$$

(a) Zeige, dass genau ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle^\vee$ auf $V^\vee$ existiert, so dass δ eine Isometrie ist.

(b) Sei B eine geordnete Basis von V, und sei $B^\vee$ die zugehörige duale Basis von $V^\vee$. Gib die Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle^\vee$ bezüglich $B^\vee$ in Termen der Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich B an.

Lösung:

(a) Die Abbildung δ ist eine Isometrie für das gesuchte Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle^\vee$ genau dann, wenn gilt:

$$\forall v, w \in V\colon\ \langle\delta(v), \delta(w)\rangle^\vee = \langle v, w\rangle. \tag{1}$$

Da δ bijektiv ist, existiert genau eine Abbildung $\langle\ ,\ \rangle^\vee$ mit dieser Eigenschaft. Definieren wir also $\langle\ ,\ \rangle^\vee$ durch die Beziehung (1) oder, äquivalenterweise, durch

$$\langle\lambda, \mu\rangle^\vee := \langle\delta^{-1}(\lambda), \delta^{-1}(\mu)\rangle$$

für alle $\lambda, \mu \in V^\vee$, so folgt aus der Linearität und Injektivität von δ^{-1}, dass dies ein Skalarprodukt auf $V^\vee$ mit der gewünschten Eigenschaft definiert.

(b) Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Basis von V und

$$A \ := \ [\langle\ ,\ \rangle]_B \ = \ \big(\langle v_i, v_j\rangle\big)_{i,j}$$

die Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich B. Dann ist $\delta(B) := (\delta(v_1), \ldots, \delta(v_n))$ eine geordnete Basis von $V^\vee$, und nach Konstruktion ist die Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle^\vee$ bezüglich $\delta(B)$ gleich

$$[\langle\ ,\ \rangle^\vee]_{\delta(B)} \ = \ \big(\langle\delta(v_i), \delta(v_j)\rangle^\vee\big)_{i,j} \ = \ \big(\langle v_i, v_j\rangle\big)_{i,j} \ = \ A.$$

Sodann sei $B^\vee = (v_1^\vee, \ldots, v_n^\vee)$ die duale Basis zu B. Für alle j und k gilt dann

$$\Big(\sum_i \langle v_j, v_i\rangle\, v_i^\vee\Big)(v_k) \ = \ \sum_i \langle v_j, v_i\rangle\, v_i^\vee(v_k) \ = \ \sum_i \langle v_j, v_i\rangle\, \delta_{i,k} \ = \ \langle v_j, v_k\rangle \ = \ \delta(v_j)(v_k).$$

Durch Variieren von k folgt daraus

$$\delta(v_j) \ = \ \sum_i \langle v_j, v_i\rangle\, v_i^\vee.$$

Also ist die Basiswechselmatrix zwischen $\delta(B)$ und $B^\vee$ gleich

$${}_{B^\vee}[\mathrm{id}_V]_{\delta(B)} \ = \ \big(\langle v_j, v_i\rangle\big)_{i,j} \ = \ A^T \ = \ A.$$

Deren Inverse ist die Basiswechselmatrix

$${}_{\delta(B)}[\mathrm{id}_{V^\vee}]_{B^\vee} \ = \ (A^T)^{-1}.$$

Nach der Basiswechselformel aus §10.4 der Vorlesung folgt daraus

$$\begin{aligned}
[\langle\ ,\ \rangle^\vee]_{B^\vee} \ &= \ {}_{\delta(B)}[\mathrm{id}_{V^\vee}]_{B^\vee}^T \cdot [\langle\ ,\ \rangle^\vee]_{\delta(B)} \cdot {}_{\delta(B)}[\mathrm{id}_{V^\vee}]_{B^\vee} \\
&= \ ((A^T)^{-1})^T A A^{-1} \ = \ A^{-1} A A^{-1} \ = \ A^{-1}.
\end{aligned}$$

6. Seien f und g lineare Abbildungen von euklidischen Vektorräumen, deren Adjungierte f^* und g^* existieren. Zeige:

   (a) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

   (b) $(f + g)^* = f^* + g^*$

   (c) $(cf)^* = cf^*$ für alle $c \in \mathbb{R}$

   (d) Wenn f invertierbar ist und $(f^{-1})^*$ existiert, so gilt $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

   *(e) Wenn f invertierbar ist, existiert dann $(f^{-1})^*$ immer?

   Lösung:

   (a) Für alle v und w gilt

   $$\langle (f \circ g)(v), w\rangle = \langle f(g(v)), w\rangle = \langle g(v), f^*(w)\rangle = \langle v, g^*(f^*(w))\rangle = \langle v, (g^* \circ f^*)(w)\rangle.$$

   Also ist $g^* \circ f^*$ eine Adjungierte von $f \circ g$ und somit gleich $(f \circ g)^*$.

   (b) Aus der Linearität von f und g und der Bilinearität des Skalarproduktes folgt

   $$\langle (f+g)(v), w\rangle = \langle f(v), w\rangle + \langle g(v), w\rangle = \langle v, f^*(w)\rangle + \langle v, g^*(w)\rangle = \langle v, (f^*+g^*)(w)\rangle$$

   für alle v und w. Somit existiert $(f + g)^*$ und ist gleich $f^* + g^*$.

   (c) Aus der Linearität von f und der Bilinearität des Skalarproduktes folgt

   $$\langle (cf)(v), w\rangle = \langle f(cv), w\rangle = \langle cv, f^*(w)\rangle = \langle v, cf^*(w)\rangle$$

   für alle v und w. Somit existiert $(cf)^*$ und ist gleich cf^*.

   (d) Falls $(f^{-1})^*$ existiert, dann folgt aus (a)

   $$f^* \circ (f^{-1})^* = (f^{-1} \circ f)^* = \mathrm{id}^* = \mathrm{id} \quad \text{und} \quad (f^{-1})^* \circ f^* = (f \circ f^{-1})^* = \mathrm{id}^* = \mathrm{id}\,.$$

   Also ist $(f^{-1})^*$ ein beidseitiges Inverses zu f^*, und es gilt $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

   *(e) Die Adjungierte der Inverse muss nicht immer existieren: Sei zum Beispiel

   $$V := \Big\{ (x_n)_{n \geqslant 1} \;\Big|\; \forall n\colon x_n \in \mathbb{R} \wedge \sum_{n \geqslant 1} x_n^2 < \infty \Big\}$$

   der Raum aller reellen ℓ^2-Folgen mit dem Skalarprodukt

   $$\langle (x_n), (y_n)\rangle := \sum_{n \geqslant 1} x_n y_n\,.$$

   Betrachte den Unterraum

   $$W := \Big\{ (x_n)_{n \geqslant 1} \in V \;\Big|\; \sum_{n \geqslant 1} n^2 x_n^2 < \infty \Big\}$$

mit dem von V induziertem Skalarprodukt. Dann ist die lineare Abbildung

$$f : V \to W,\ (x_n)_n \mapsto \left(\frac{x_n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$$

invertierbar und besitzt die Adjungierte

$$f^* : W \to V,\ (y_n)_n \mapsto \left(\frac{y_n}{n}\right)_{n \geqslant 1}.$$

Würde $(f^{-1})^*$ existieren, so müsste f^* nach (d) invertierbar sein. Insbesondere wäre f^* dann surjektiv und die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_n \in V$ läge im Bild von f^*. Nach der obigen Formel für f^* müsste ihr Urbild die Folge $(1)_n$ sein. Diese liegt aber nicht in W, was ein Widerspruch ist. Somit existiert $(f^{-1})^*$ *nicht*.