Musterlösung Serie 20

Adjungierte Abbildungen, Spektralsatz, Bilinearformen und quadratische Formen

1. Sei f ein selbstadjungierter Endomorphismus eines euklidischen Vektorraums V. Zeige, dass die Eigenräume von f zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind.

   Lösung: Seien λ, $\mu \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene Eigenwerte von f, und seien $v \in \mathrm{Eig}_\lambda(f)$ und $w \in \mathrm{Eig}_\mu(f)$. Aufgrund der Bilinearität des Skalarprodukts und der Selbstadjungiertheit von f gilt dann

   $$\lambda \cdot \langle v, w\rangle \;=\; \langle \lambda v, w\rangle \;=\; \big\langle f(v), w\big\rangle \;=\; \big\langle v, f(w)\big\rangle \;=\; \langle v, \mu w\rangle \;=\; \mu \cdot \langle v, w\rangle.$$

   Wegen $\lambda \neq \mu$ muss daher $\langle v, w\rangle = 0$ sein. Also gilt $\mathrm{Eig}_\lambda(f) \perp \mathrm{Eig}_\mu(f)$.

2. Seien f, g_1, g_2 Endomorphismen eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraumes mit

   $$f^* \circ f \circ g_1 = f^* \circ f \circ g_2\,.$$

   Zeige, dass $f \circ g_1 = f \circ g_2$ ist.

   Lösung: Für alle $v, w \in V$ gilt

   $$\begin{aligned}\Big\langle f(v), f\big((g_1 - g_2)(w)\big)\Big\rangle &= \Big\langle v, f^* \circ f\big((g_1 - g_2)(w)\big)\Big\rangle \\ &= \big\langle v, (f^* \circ f \circ g_1 - f^* \circ f \circ g_2)(w)\big\rangle \\ &= 0.\end{aligned}$$

   Mit $v := (g_1 - g_2)(w)$ folgt also für alle $w \in V$:

   $$\big\|f\big((g_1 - g_2)(w)\big)\big\|^2 = 0$$

   und somit $f\big((g_1 - g_2)(w)\big) = 0$, also $(f \circ g_1)(w) = (f \circ g_2)(w)$.

*3. Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus zwischen euklidischen Vektorräumen. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Adjungierte $f^*\colon W \to V$ existiert, wenn $\dim(V) < \infty$ ist. Gilt dies auch, wenn $\dim(W) < \infty$ ist?

   Lösung: Nein. Für ein Gegenbeispiel sei I eine beliebige unendliche Menge und sei $V := \mathbb{R}^{(I)}$ versehen mit dem Skalarprodukt

   $$\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle \;:=\; \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

Dieser Raum hat die Orthonormalbasis $\{\underline{e}_i \mid i \in I\}$ mit $\underline{e}_i = (\delta_{ij})_j$. Sei $W := \mathbb{R}$ mit dem Standardskalarprodukt $\langle u, v\rangle := uv$, und betrachte den Homomorphismus

$$f\colon V \to W, \quad \underline{x} \mapsto \sum_{i\in I} x_i.$$

Nehmen wir an, dass dessen Adjungierte $f^*\colon W \to V$ existiert. Dann ist $f^*(1) = (x_i)_{i\in I}$ mit fast allen $x_i = 0$. Für jedes i gilt aber

$$x_i \;=\; \langle e_i, (x_i)_i\rangle \;=\; \langle e_i, f^*(1)\rangle \;=\; \langle f(e_i), 1\rangle \;=\; \langle 1, 1\rangle \;=\; 1.$$

Zusammen ist dies ein Widerspruch; also existiert f^* nicht.

4. Sei V der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren periodischen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode 2π, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx\,.$$

Betrachte die lineare Abbildung

$$D\colon V \to V,\; f \mapsto \frac{df}{dx}.$$

(a) Ist D selbstadjungiert? Bestimme jedenfalls die Adjungierte, falls sie existiert.

(b) Ist $\Delta := -D \circ D$ selbstadjungiert?

(c) Sei $U \subset V$ das lineare Erzeugnis der Funktionen

$$\{x \mapsto \cos(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \mapsto \sin(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\}\,,$$

mit dem von V induzierten Skalarprodukt. Finde eine Orthonormalbasis von U, welche aus Eigenvektoren von $\Delta|_U$ besteht, sowie die Multiplizitäten aller Eigenwerte.

Lösung:

(a) Aus partieller Integration folgt

$$\langle Df, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{df}{dx} g\,dx = \frac{1}{2\pi} fg\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\frac{dg}{dx}\,dx = -\langle f, Dg\rangle$$

für alle f, g, also $D^* = -D \neq D$. Daher ist D nicht selbstadjungiert.

(b) Aus (a) und Aufgabe 6 (a) von Serie 19 folgt

$$\Delta^* \;=\; -D^* \circ D^* \;=\; -(-D) \circ (-D) \;=\; \Delta,$$

also ist Δ selbstadjungiert.

(c) Für jedes $n \neq 0$ setze $c_n(x) := \sqrt{2}\cos(nx)$ und $s_n(x) := \sqrt{2}\sin(nx)$. Ausserdem sei $c_0(x) := 1$ und $s_0(x) := 0$. *Behauptung*: Die Menge

$$B := \{c_n \mid n \geqslant 0\} \cup \{s_n \mid n \geqslant 1\}$$

ist eine Orthonormalbasis von U, die aus Eigenvektoren von Δ besteht.

Beweis: Wegen $\sin(-nx) = -\sin(nx)$ und $\cos(-nx) = \cos(nx)$ für alle $n \geqslant 1$ sowie $s_0 = 0$ erzeugt B den Unterraum U. Sodann implizieren die üblichen Ableitungsregeln für trigonometrische Funktionen für alle $n \geqslant 0$

$$\Delta s_n = n^2 s_n \quad \text{und} \quad \Delta c_n = n^2 c_n\,.$$

Also sind alle Elemente von B Eigenvektoren von Δ.
Als nächstes zeigen wir, dass sie zueinander orthonormal sind. Dafür rechnen wir für alle $n, m \geqslant 0$ unter Benutzung der Selbstadjungiertheit von Δ:

$$n^2\langle s_n, s_m\rangle = \langle n^2 s_n, s_m\rangle = \langle \Delta s_n, s_m\rangle \overset{!}{=} \langle s_n, \Delta s_m\rangle = \langle s_n, m^2 s_m\rangle = m^2\langle s_n, s_m\rangle.$$

Für $n \neq m$ folgt daraus $\langle s_n, s_m\rangle = 0$. Durch analoge Rechnungen zeigt man $\langle s_n, c_m\rangle = \langle c_n, s_m\rangle = \langle c_n, c_m\rangle = 0$ für alle $n \neq m$. (All dies kann man übrigens auch durch direkte Berechnung der Integrale, z.B. mit dem Additionstheorem, zeigen.) Weiter können wir für alle $n \geqslant 1$ die Formeln

$$\begin{aligned}
\cos^2(nx) &= \frac{\cos(2nx)+1}{2} \\
\sin^2(nx) &= 1 - \cos^2(nx) = \frac{1-\cos^2(2nx)}{2} \\
\sin(nx)\cos(nx) &= \frac{1}{2}\sin(2nx),
\end{aligned}$$

in die betreffenden Integrale einsetzen und ausrechnen:

$$\langle s_n, s_n\rangle = 1, \quad \langle s_n, c_n\rangle = 0, \quad \langle c_n, c_n\rangle = 1\,.$$

Noch einfacher berechnen wir

$$\langle c_0, c_0\rangle = 1, \quad \langle c_0, s_n\rangle = 0, \quad \langle c_0, c_n\rangle = 0$$

für alle $n \geqslant 1$. Zusammen zeigt dies, dass B ein Orthonormalsystem ist. Da es den Unterraum U erzeugt, ist es daher eine Orthonormalbasis von U.
Insgesamt ist B also eine Orthonormalbasis von U aus Eigenvektoren von Δ. Jeder Eigenraum von $\Delta|_U$ ist daher von Vektoren in B erzeugt. Wir schliessen, dass $\Delta|_U$ die Eigenwerte

$$0, 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$$

mit den jeweiligen Vielfachheiten $1, 2, 2, 2, \ldots$ besitzt.

5. Betrachte die reelle symmetrische Matrix

$$G := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Führe für G eine Hauptachsentransformation durch, d. h., finde eine orthogonale Matrix S, so dass $S^T G S$ eine Diagonalmatrix ist.

Hinweis: Alle Eigenwerte von G sind ganzzahlig.

Lösung: Das charakteristische Polynom von G ist

$$P_G(X) = X^4 - 12v^3 + 36X^2 - 32X = X\left(X^3 - 12X^2 + 36X - 32\right).$$

Aus dieser Faktorisierung ersehen wir, dass G den Eigenwert 0 besitzt und das Produkt der übrigen Eigenwerte gleich 32 ist. Nach dem Hinweis kommen nur Teiler von 32 als weitere Eigenwerte von G in Frage. Durch Testen der Kandidaten $\pm 1, 2, 4, 8, 16, 32$ ergibt sich die Faktorisierung

$$P_G(X) = X(X-2)^2(X-8).$$

Mit Vielfachheiten gerechnet hat G also die Eigenwerte

$$\lambda_1 := 0, \quad \lambda_2 := \lambda_3 := 2, \quad \lambda_4 := 8.$$

Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich zum Beispiel als

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

besitzt. Durch Normalisieren der Vektoren v_1 und v_4 und durch Anwenden des Gram-Schmidt-Verfahrens auf v_2 und v_3 erhalten wir die folgende Orthonormalbasis von Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &:= v_1/\|v_1\| = v_1/2 \\ \tilde{v}_2 &:= v_2/\|v_2\| = v_2/\sqrt{2} \\ \tilde{v}_3 &:= \frac{v_3 - \langle v_3, v_2/\|v_2\|\rangle}{\|v_3 - \langle v_3, v_2/\|v_2\|\rangle\|} = \frac{v_3}{\|v_3\|} = v_3/\sqrt{2} \\ \tilde{v}_4 &:= v_4/\|v_4\| = v_4/2\,. \end{aligned}$$

Definieren wir also S als die Matrix mit den Spalten $\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_4$,

$$S := \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/2 \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

so ist S orthogonal mit

$$S^T G S = S^{-1} G S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. Sei β die Bilinearform $(x, y) \mapsto x^T A y$ auf $\mathbb{R}^2$ für die symmetrische Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Finde eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}^2$, bezüglich welcher β eine Darstellungsmatrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$ hat.

   Lösung: Die Matrix A hat die Eigenwerte 3 und 7 zu den jeweiligen Eigenvektoren $v_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_2 := \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Daher bilden $b_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} v_1$ und $b_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} v_2$ eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, bezüglich welcher β die Darstellungsmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{smallmatrix}\right)$ hat. Nun müssen wir nur noch die Basisvektoren richtig skalieren: Die Vektoren $w_1 := \frac{1}{\sqrt{3}} b_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $w_2 := \frac{1}{\sqrt{7}} b_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ bilden eine geordnete Basis von $\mathbb{R}^2$, bezüglich welcher β die Darstellungsmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ hat.

7. Betrachte die durch die folgende Formel definierte quadratische Form q auf $\mathbb{R}^4$:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) \;:=\; 4x_1^2 - 12x_1x_2 + 12x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_4 - 4x_3x_4 + 3x_4^2 .$$

   Ist q positiv definit? Ist q ausgeartet? Was ist die Signatur von q?

   Hinweis: Verwende quadratische Ergänzung.

   Lösung: Mit quadratischer Ergänzung finden wir:

$$\begin{aligned} q(x) &= 4(x_1 - \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{1}{4}x_4)^2 + 3x_2^2 + \tfrac{11}{4}x_4^2 + 3x_2x_4 + 2x_3^2 - 4x_3x_4 \\ &= (2x_1 - 3x_2 + \tfrac{1}{2}x_4)^2 + 2(x_3 - x_4)^2 + 3x_2^2 + 3x_2x_4 + \tfrac{3}{4}x_4^2 \\ &= (2x_1 - 3x_2 + \tfrac{1}{2}x_4)^2 + 2(x_3 - x_4)^2 + 3(x_2 + \tfrac{1}{2}x_4)^2. \end{aligned}$$

   Wir sehen $q(x) \geqslant 0$ für alle x und $q(x) = 0$ genau dann, wenn x in dem Unterraum

$$\begin{aligned} V \;&:=\; \Big\{(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\Big|\; 2x_1 - 3x_2 + \tfrac{1}{2}x_4 = 0,\; x_3 - x_4 = 0,\; x_2 + \frac{x_4}{2} = 0\Big\} \\ &= \left\{(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\} \;=\; \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

   liegt. Die quadratische Form ist also positiv semidefinit, ausgeartet, und besitzt die Signatur $(3, 0)$.

   Aliter: Es gilt $q(x) = x^T A x$ mit der symmetrischen Matrix

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & 1 \\ -6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Deren erste drei Hauptminoren $\det(A_1) = 4$ und $\det(A_2) = 12$ und $\det(A_3) = 24$ sind alle positiv; also ist die Einschränkung von q auf den Unterraum $x_4 = 0$ positiv definit. Nach Abschnitt 10.15 der Vorlesung hat A folglich mindestens 3 positive Eigenwerte. Wegen $\det A = 0$ hat A aber auch den Eigenwert 0. Somit ist A ausgeartet und positiv semidefinit mit der Signatur $(3, 0)$.

8. Sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Sei q eine homogene quadratische Form in n Variablen mit Koeffizienten in K. Zeige, dass q nach einer linearen Variablentransformation Diagonalgestalt bekommt, das heisst, dass eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert und Koeffizienten $b_i \in K$, so dass

$$q\big((y_1, \ldots, y_n)U\big) \;=\; \sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2.$$

Lösung: Schreibe $q(x_1, \ldots, x_n) = q(x)$ mit dem Spaltenvektor $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$. Nach der Vorlesung ist dann $q(x) = x^T A x$ für eine symmetrische Matrix A. Wegen $1 + 1 \neq 0$ liefert der symmetrische Gauss-Algorithmus eine invertierbare Matrix U, so dass $U^T A U$ eine Diagonalmatrix ist, sagen wir mit Diagonaleinträgen $b_1, \ldots, b_n$. Für jedes $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$ gilt dann $q(Uy) = y^T U^T A U y = \sum_{i=1}^n b_i y_i^2$, wie gewünscht.

Aliter: Direkte Konstruktion mit quadratischer Ergänzung: Induktion über die Anzahl n der Variablen. Im Fall $n = 0$ ist nichts zu tun. Sei also $n \geqslant 1$ und $q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$ mit $a_{ij} \in K$.

Fall 1: Wenn $a_{nn} \neq 0$ ist, substitutieren wir $x_n = y_n - \frac{1}{2a_{nn}} \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i$ und erhalten eine homogene quadratische Form der Form

$$q'(x_1, \ldots, x_{n-1}, y_n) \;=\; \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1} b_{ij} x_i x_j \;+\; a_{nn} y_n^2 \;=\; q''(x_1, \ldots, x_{n-1}) + a_{nn} y_n^2.$$

Die Induktionsvoraussetzung für q'' liefert dann eine lineare Variablentransformation $\varphi\colon (x_1, \ldots, x_{n-1}) \mapsto (y_1, \ldots, y_{n-1})$, so dass $q''(\varphi^{-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}))$ Diagonalgestalt hat. Damit hat auch $q'(\varphi^{-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}), y_n)$ Diagonalgestalt.

Fall 2: Wenn $a_{nn} = 0$ ist, aber $a_{ii} \neq 0$ für ein $i < n$, vertauschen wir x_i und x_n und bekommen die Situation aus Fall 1.

Fall 3: Wenn $a_{nn} = a_{ii} = 0$ ist, aber $a_{in} \neq 0$ für ein $i < n$, substituieren wir $x_i = y_i + x_n$ und bekommen damit wieder Fall 1.

Fall 4: Wenn die Koeffizienten $a_{in} = 0$ sind für alle $1 \leqslant i \leqslant n$, das heisst, wenn q gar nicht von x_n abhängt, dann ist q einfach eine homogene quadratische Form in $n - 1$ Variablen und die Behauptung folgt aus der Induktionsvoraussetzung.