D-MATH
Prof. Richard Pink

Lineare Algebra II

FS 2022

Musterlösung Serie 21

Spektralsatz mit Anwendungen, unitäre Vektorräume

1. Betrachte die reelle symmetrische Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finde *ohne Berechnung der Eigenwerte* ein $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass $S^T BS$ diagonal ist.

Lösung: Wir verwenden den symmetrischen Gauss-Algorithmus und erhalten die folgenden Zwischenschritte:

B	I_4
$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 9 & 43 \\ 0 & -6 & 43 & 6 \end{pmatrix}$	$I_4 + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{55}\begin{pmatrix} 275 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 121 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 95 & 485 \\ 0 & 0 & 485 & 30 \end{pmatrix}$	$I_4 + \frac{1}{55}\begin{pmatrix} 0 & -33 & -15 & -40 \\ 0 & 0 & -10 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{1045}\begin{pmatrix} 5225 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2299 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1805 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -46475 \end{pmatrix}$	$I_4 + \frac{1}{1045}\begin{pmatrix} 0 & -627 & -95 & -275 \\ 0 & 0 & -190 & 1540 \\ 0 & 0 & 0 & -5335 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Mit

$$S := I_4 + \frac{1}{1045}\begin{pmatrix} 0 & -627 & -95 & -275 \\ 0 & 0 & -190 & 1540 \\ 0 & 0 & 0 & -5335 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist somit

$$S^T BS = \frac{1}{1045}\begin{pmatrix} 5225 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2299 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1805 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -46475 \end{pmatrix}.$$

*2. Seien A und B zwei reelle symmetrische $n \times n$-Matrizen mit A positiv definit.

(a) Zeige, dass eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ existiert, so dass $S^T AS$ und $S^T BS$ beide Diagonalmatrizen sind.

(b) Gilt dasselbe ohne die Positiv-Definitheit von A? Untersuche zum Beispiel die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Lösung:

(a) Da A symmetrisch und positiv definit ist, existiert eine invertierbare Matrix R mit $A = R^T R$. Dann ist $C := (R^{-1})^T BR^{-1}$ wieder eine reelle symmetrische Matrix. Nach dem Spektralsatz existiert also eine orthogonale Matrix Q, so dass $Q^T CQ$ eine Diagonalmatrix ist. Mit $S := R^{-1}Q$ ist dann

$$S^T BS \;=\; (R^{-1}Q)^T B(R^{-1}Q) \;=\; Q^T (R^{-1})^T BR^{-1}Q \;=\; Q^T CQ$$

eine Diagonalmatrix und

$$S^T AS \;=\; (R^{-1}Q)^T A(R^{-1}Q) \;=\; Q^T (R^{-1})^T \cdot R^T R \cdot R^{-1}Q \;=\; Q^T Q \;=\; I_n$$

ebenfalls, wie gewünscht.

Aliter: Da A symmetrisch und positiv definit ist, ist die Bilinearform

$$\langle\ ,\ \rangle_A : (v, w) \mapsto v^T Aw$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$. Wegen

$$\langle A^{-1}Bv, w\rangle_A = (A^{-1}Bv)^T Aw = v^T Bw = v^T A(A^{-1}Bw) = \langle v, A^{-1}Bw\rangle_A$$

für alle v, w ist der Homomorphismus $L_{A^{-1}B}$ selbstadjungiert bezüglich $\langle\ ,\ \rangle_A$. Nach dem Spektralsatz existiert also eine Basis $b := (v_1, \ldots, v_n)$, die orthonormal ist bezüglich $\langle\ ,\ \rangle_A$ und aus Eigenvektoren von $L_{A^{-1}B}$ besteht. Dies bedeutet, dass die Darstellungsmatrix $[\langle\ ,\ \rangle_A]_b$ die Einheitsmatrix und die Darstellungsmatrix ${}_b[L_{A^{-1}B}]_b$ eine Diagonalmatrix ist.
Sei nun S die Matrix mit den Spalten $v_1, \ldots, v_n$. Aus der Basiswechselformel für Bilinearformen folgt dann

$$I_n \;=\; [\langle\ ,\ \rangle_A]_b \;=\; S^T AS$$

und daraus $S^{-1} = S^T A$. Mit der Basiswechselformel für Endomorphismen folgt daraus

$${}_b[L_{A^{-1}B}]_b \;=\; S^{-1}(A^{-1}B)S \;=\; S^T A \cdot A^{-1}BS \;=\; S^T BS.$$

Daher sind $S^T AS = I_n$ und $S^T BS$ simultan diagonal.

(b) Für jede 2×2-Matrix $S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ berechnen wir

$$S^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} S \;=\; \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix}$$

$$S^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S \;=\; \begin{pmatrix} 2ac & ad + bc \\ ad + bc & 2bd \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen sind diagonal genau dann, wenn $ab = cd$ und $ad = -bc$ ist. Ausserdem ist S invertierbar genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$ ist. Zusammen verlangt dies, dass $2ad = -2bc = ad - bc \neq 0$ ist. Insbesondere sind a, b, c, d alle ungleich Null. Durch Teilen von $ad = -bc$ durch $ab = cd$ folgt

$$\frac{d}{b} = \frac{ad}{ab} = \frac{-bc}{cd} = -\frac{b}{d},$$

also $(\frac{d}{b})^2 = -1$, was in $\mathbb{R}$ gar nicht möglich ist. Somit kann die gesuchte Matrix S nicht existieren.

3. Seien A und B symmetrische reelle $n \times n$-Matrizen mit A positiv definit. Zeige, dass ein $c_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $cA + B$ positiv definit ist für alle $c > c_0$.

   Lösung: Im Fall $n = 0$ ist $cA + B$ immer positiv definit. Sei also $n > 0$. Sei $\langle\ ,\ \rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\|$ die zugehörige Norm. Da die Menge

$$S^{n-1} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, v\rangle = 1\}$$

   kompakt und nicht-leer ist, nehmen die stetigen Funktionen $v \mapsto \langle Av, v\rangle$ und $v \mapsto \langle Bv, v\rangle$ ihre Minima m_A bzw. m_B auf S^{n-1} an. Aus der Positiv-Definitheit von A folgt $m_A > 0$. Betrachte $c > c_0 := |m_B|/m_A$. Für alle $v \in S^{n-1}$ gilt dann

$$\langle (cA + B)v, v\rangle \;=\; c\langle Av, v\rangle + \langle Bv, v\rangle \;\geqslant\; cm_A + m_B \;>\; c_0 m_A + m_B \;\geqslant\; 0.$$

   Für alle $v \in V \smallsetminus \{0\}$ ist $\|v\| > 0$ und $\frac{v}{\|v\|} \in S^{n-1}$, also folgt daraus

$$\langle (cA + B)v, v\rangle \;=\; \|v\|^2 \cdot \big\langle (cA + B)\tfrac{v}{\|v\|}, \tfrac{v}{\|v\|}\big\rangle \;>\; 0.$$

   Somit ist $cA + B$ positiv definit.

   Aliter: Nach Aufgabe 2 existiert eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass S^TAS und S^TBS beides Diagonalmatrizen sind. Mit A ist dann auch S^TAS positiv definit, also sind alle Diagonaleinträge von S^TAS positiv. Daher existiert ein c_0, so dass für alle $c > c_0$ die Diagonalmatrix $c\,S^TAS + S^TBS$ nur positive Diagonaleinträge hat. Dann ist $c\,S^TAS + S^TBS = S^T(cA + B)S$ positiv definit und folglich $cA + B$ ebenfalls, wie gewünscht.

4. Welche der folgenden drei reellen symmetrischen Matrizen sind positiv definit?

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

   Hinweis: Verwende das Hauptminorenkriterium.

   Lösung: Seien A_i, B_i, C_i die jeweiligen Hauptminoren. Da $\det A_2 = \det\left(\begin{smallmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right) = -6$ negativ ist, ist A nicht positiv definit. Dagegen sind $\det B_i = 6, 33, 170$ für $i = 1, 2, 3$ alle positiv, also ist B positiv definit. Ebenso sind $\det C_i = 3, 18, 135, 592$ für $i = 1, \ldots, 4$ alle positiv, also ist auch C positiv definit.

5. Sei A die positiv-definite reelle symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 53 & -4 & -26 \\ -4 & 29 & 22 \\ -26 & 22 & 44 \end{pmatrix}.$$

Finde eine positiv-definite reelle symmetrische Matrix B mit $B^2 = A$.

Lösung: Durch Diagonalisierung erhält man

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Matrix ist somit

$$B := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Bestimme eine Singulärwertzerlegung $A = QDR$ der reellen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Gib eine Singulärwertzerlegung von A^T an.

Lösung:

(a) Wir berechnen die Matrix

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und das zugehörige charakteristische Polynom

$$P_{A^TA}(X) = \det\begin{pmatrix} 2-X & -1 \\ -1 & 2-X \end{pmatrix} = X^2 - 4X + 3 = (X-3)(X-1).$$

Somit hat $A^T A$ die Eigenwerte $\lambda_1 := 3$ und $\lambda_2 := 1$. Die Singulärwerte von A sind also $\sigma_1 := \sqrt{3}$ und $\sigma_2 := 1$ und die Matrix D ist

$$D := \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die normierten Eigenvektoren von $A^T A$ zu den Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2 sind

$$v_1 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad v_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese bilden die Spalten von R^T, also betrachten wir die orthogonale Matrix

$$R := (v_1\ v_2)^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Gleichung $AR^{-1} = QD$ erfordert, dass für $i = 1, 2$ die i-te Spalte von Q gleich $1/\sigma_i$ mal der i-ten Spalte von AR^{-1} ist. Wir haben also $Q := (w_1\ w_2\ w_3)$ mit

$$w_1 := \frac{1}{\sigma_2} A v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_2 := \frac{1}{\sigma_1} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und einem beliebigen Vektor w_3, so dass (w_1, w_2, w_3) eine Orthonormalbasis ist. Zum Beispiel liefert der Gram-Schmidt-Algorithmus für die Basis (w_1, w_2, e_1) mit $e_1 := (1, 0, 0)^T$ den Vektor

$$w_3 := \frac{e_1 - \langle e_1, w_1 \rangle w_1 - \langle e_1, w_2 \rangle w_2}{\| e_1 - \langle e_1, w_1 \rangle w_1 - \langle e_1, w_2 \rangle w_2 \|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt die gesuchte Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A = QDR = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Die Transponierte einer orthogonalen Matrix ist wieder orthogonal. Somit ist $A^T = R^T D^T Q^T$ wieder eine Singulärwertzerlegung.

7. Zeige, dass das charakteristische Polynom jeder hermiteschen Matrix reelle Koeffizienten hat.

Lösung: Für jedes komplexe Polynom $\varphi(X) = \sum a_k X^k$ definieren wir das komplex konjugierte Polynom durch $\overline{\varphi}(X) := \sum \overline{a}_k X^k$. Dies definiert einen Ringhomomorphismus $\mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$. Für jede hermitesche Matrix A gilt nach Definition $A = A^* := \overline{A}^T$. Für ihr charakteristisches Polynom $P_A(X) = \sum_k a_k X^k$ gilt daher

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(XI_n - A) \\ &= \det\bigl(XI_n - \overline{A}^T\bigr) \\ &= \det\bigl(\overline{(XI_n - A)}^T\bigr) \\ &= \overline{\det\bigl((XI_n - A)^T\bigr)} \\ &= \overline{\det\bigl(XI_n - A\bigr)} = \overline{P_A}(X). \end{aligned}$$

Folglich gilt $\overline{a_k} = a_k$, also $a_k \in \mathbb{R}$ für alle k.

Aliter mit Spektralsatz: Jede hermitesche Matrix A ist nach dem Spektralsatz ähnlich zu einer Diagonalmatrix D mit reellen Diagonaleinträgen. Das charakteristische Polynom $P_A(X)$ von A ist invariant unter Ähnlichkeit. Folglich ist es gleich dem charakteristischen Polynom der Matrix D, welche nur reelle Einträge besitzt. Also hat $P_A(X)$ reelle Koeffizienten.

8. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Zeige, dass zu jeder Sesquilinearform $f : V \times V \to \mathbb{C}$ eine eindeutige lineare Abbildung $T_f : V \to V$ existiert mit

$$\forall x, y \in V: \;\; f(x,y) = \langle T_f x, y \rangle \, .$$

Lösung: Sei $B = (v_1, \ldots, v_n)$ eine geordnete Orthonormalbasis von V. Falls die gewünschte lineare Abbildung T_f existiert, so ist ihre Darstellungsmatrix gleich

$$[T_f]_B \;=\; \Big(\langle v_i, T_f v_j \rangle\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \;=\; \Big(\overline{\langle T_f v_j, v_i \rangle}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \;=\; \Big(\overline{f(v_j, v_i)}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \, .$$

Dies zeigt die Eindeutigkeit von T_f. Definieren wir umgekehrt die Abbildung $T_f \in \operatorname{End}(V)$ als den eindeutigen Endomorphismus mit Darstellungsmatrix

$$[T_f]_B = \Big(\overline{f(v_j, v_i)}\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n},$$

so gilt für alle Elemente $x = \sum_i a_i v_i$ und $y = \sum_k b_k v_k$ in V

$$\begin{aligned}
\langle T_f x, y \rangle &= \Big\langle \sum_i a_i \sum_j \overline{f(v_i, v_j)} v_j, \sum_k b_k v_k \Big\rangle \\
&= \sum_{i,j,k} \overline{a_i} b_k f(v_i, v_j) \delta_{jk} \\
&= \sum_{i,j} \overline{a_i} b_j f(v_i, v_j) \\
&= f\Big(\sum_i a_i v_i, \sum_j b_j v_j\Big) \\
&= f(x, y) \, .
\end{aligned}$$

Damit ist T_f die gewünschte Abbildung.