Musterlösung Serie 22

Unitäre Vektorräume

1. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum.

   (a) Zeige für alle $x, y \in V$ die *Polarisationsformel*

   $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2\Big).$$

   (b) Sei $f : V \to V$ eine bijektive lineare Abbildung. Zeige

   $$f \text{ ist unitär} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall v \in V : \langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, v\rangle$$

Lösung:

(a) Für alle $x, y \in V$ gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2\right)\\
=\ &\frac{1}{4}\Big(\langle x+y, x+y\rangle - \langle x-y, x-y\rangle - i\langle x+iy, x+iy\rangle + i\langle x-iy, x-iy\rangle\Big)\\
=\ &\frac{1}{4}\Big(\langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle\\
&\quad - (\langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle)\\
&\quad -i\,(\langle x,x\rangle + \langle x,iy\rangle + \langle iy,x\rangle + \langle iy,iy\rangle)\\
&\quad +i\,(\langle x,x\rangle - \langle x,iy\rangle - \langle iy,x\rangle + \langle iy,iy\rangle)\Big)\\
=\ &\frac{1}{4}\Big(2\langle x,y\rangle + 2\langle y,x\rangle - \underbrace{2i\langle x,iy\rangle}_{-2\langle x,y\rangle} - \underbrace{2i\langle iy,x\rangle}_{2\langle y,x\rangle}\Big)\\
=\ &\langle x,y\rangle.
\end{aligned}$$

(b) Die Richtung '$\Rightarrow$' folgt direkt aus der Definition einer unitären Abbildung. Nehmen wir umgekehrt an:

$$\forall v \in V:\ \langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, v\rangle.$$

Dann folgt aus der Polarisationsformel

$$
\begin{aligned}
&\langle f(v), f(w)\rangle \\
&= \frac{1}{4}\Big(||f(v)+f(w)||^2 - ||f(v)-f(w)||^2 + i||f(v)+if(w)||^2 - i||f(v)-if(w)||^2\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(||f(v+w)||^2 - ||f(v-w)||^2 + i||f(v+iw)||^2 - i||f(v-iw)||^2\Big) \\
&= \frac{1}{4}\Big(||v+w||^2 - ||v-w||^2 + i||v+iw||^2 - i||v-iw||^2\Big) \\
&= \langle v, w\rangle
\end{aligned}
$$

für alle $v, w \in V$, also ist f unitär.

2. Sei $n \geqslant 1$ und sei $\zeta := e^{2\pi i/n}$. Zeige, dass die folgende komplexe Matrix unitär ist:

$$A := \Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\zeta^{(k-1)(\ell-1)}\Big)_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}.$$

Lösung: Für alle $a \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\sum_{\ell=1}^{n} \zeta^{a(\ell-1)} \;=\; \begin{cases} \frac{\zeta^{an}-1}{\zeta^{a}-1} \;=\; 0 & \text{falls } n \nmid a, \\ \sum_{\ell=1}^{n} 1 \;=\; n & \text{falls } n|a. \end{cases}$$

Mit $A^* = \overline{A^T} = \big(\zeta^{-(m-1)(\ell-1)}/\sqrt{n}\big)_{1\leqslant \ell,m\leqslant n}$ folgt für alle $1 \leqslant k, m \leqslant n$

$$(AA^*)_{km} \;=\; \sum_{\ell} \frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^{(k-1)(\ell-1)}\frac{1}{\sqrt{n}}\zeta^{-(m-1)(\ell-1)} \;=\; \frac{1}{n}\sum_{\ell}\zeta^{(k-m)(\ell-1)} \;=\; \delta_{km},$$

also $AA^* = I_n$.

*3. Im Abschnitt 11.11 der Vorlesung wurde der folgende Satz präsentiert. Führe seinen Beweis aus in Analogie zu dem entsprechenden Beweis im reellen Fall.

Satz: Für jede hermitesche $n \times n$-Matrix $A = \big(a_{k\ell}\big)_{k,\ell=1,\dots,n}$ sind äquivalent:

(a) Die Matrix A ist positiv definit.

(b) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(c) Es existiert eine invertierbare Matrix B mit $A = B^*B$.

(d) Es existiert eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R mit $A = R^*R$. (Cholesky-Zerlegung)

(e) Es existiert eine invertierbare hermitesche Matrix C mit $A = C^*C = C^2$.

(f) Die Determinante der Matrix $A_m := \big(a_{k\ell}\big)_{k,\ell=1,\dots,m}$ ist positiv für jedes $1 \leqslant m \leqslant n$. (Hauptminorenkriterium)

Lösung: (e)⇒(c) folgt mit $B := C$.

(d)⇒(c) folgt mit $B := R$.

(c)⇒(a): Sei B wie in (c). Für alle $x \in \mathbb{C}^n$ mit $x \neq 0$ ist dann $Bx \neq 0$ und folglich $x^*Ax = x^*B^*Bx = (Bx)^*(Bx) = \|Bx\|^2 > 0$. Also ist A positiv definit.

(a)⇒(d): Ist A positiv definit, so ist $\gamma\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto x^*Ay$ ein Skalarprodukt. Auf dieses und die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ von $\mathbb{C}^n$ wenden wir das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren an und erhalten eine Orthonormalbasis $b_1, \ldots, b_n$ bezüglich γ sowie Koeffizienten $a_{k\ell} \in \mathbb{C}$ und $a_{\ell\ell} \in \mathbb{R}^{>0}$, so dass für alle $1 \leqslant \ell \leqslant n$ gilt

$$e_\ell \;=\; \sum_{k=1}^{\ell} a_{k\ell} b_k.$$

Mit $a_{k\ell} := 0$ für alle $1 \leqslant \ell < k \leqslant n$ ist dann $R := (a_{k\ell})_{k,\ell}$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix. Für die Matrix $B := (b_1, \ldots, b_n)$ gilt dann

$$I_n \;=\; (e_1, \ldots, e_n) \;=\; (b_1, \ldots, b_n)R \;=\; BR.$$

Dass $b_1, \ldots, b_n$ eine Orthonormalbasis bezüglich γ ist, bedeutet andererseits

$$B^*AB \;=\; \big(b_k^*Ab_\ell\big)_{k,\ell} \;=\; \big(\delta_{k\ell}\big)_{k,\ell} \;=\; I_n.$$

Zusammen folgt daraus

$$R^*R \;=\; R^*I_nR \;=\; R^*(B^*AB)R \;=\; (BR)^*A(BR) \;=\; I_n^*AI_n \;=\; A.$$

(a)⇔(b): Nach dem Spektralsatz existiert eine unitäre Matrix Q mit

$$D \;:=\; Q^{-1}AQ \;=\; Q^*AQ \;=\; \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

für gewisse $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist A ähnlich zu D, und die λ_k sind genau die Eigenwerte von A. Da Q invertierbar ist, ist jeder von Null verschiedene Vektor in $\mathbb{C}^n$ gleich Qz für einen von Null verschiedenen Vektor $z \in \mathbb{C}^n$. Für diesen gilt dann weiter

$$(Qz)^*A(Qz) \;=\; z^*Q^*AQz \;= z^*Dz \;=\; \sum_k \lambda_k \overline{z}_k z_k \;=\; \sum_k \lambda_k |z_k|^2.$$

Dass A positiv definit ist, ist also äquivalent dazu, dass dieser Ausdruck immer > 0 ist. Im Fall $z = e_k$ ist dieser Ausdruck gleich λ_k, also muss jedes $\lambda_k > 0$ sein; woraus die Implikation (a)⇒(b) folgt. Ist umgekehrt jedes $\lambda_k > 0$, so ist die rechte Seite immer $\geqslant 0$ und $= 0$ nur, wenn alle $z_k = 0$ sind. Da wir dies bereits ausgeschlossen haben, folgt die Implikation (a)⇐(b).

(b)⇒(e): Seien Q und $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ wie soeben, wobei alle $\lambda_k \in \mathbb{R}^{>0}$ sind. Setze $D' := \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$ und $C := QD'Q^*$. Dann gilt

$$C^* \;=\; (QD'Q^*)^* \;=\; (Q^*)^*(D')^*Q^* \;=\; QD'Q^* \;=\; C,$$

also ist C hermitesch. Weiter gilt

$$\begin{aligned} C^2 &= (QD'Q^*)(QD'Q^*) \;=\; QD'(Q^*Q)D'Q^* \;=\; QD'I_nD'Q^* \;=\; QD'D'Q^* \\ &= QDQ^* \;=\; Q(Q^*AQ)Q^* \;=\; (QQ^*)A(QQ^*) \;=\; I_nAI_n \;=\; A. \end{aligned}$$

(a)⇒(f): Für jedes $1 \leqslant m \leqslant n$ betrachten wir die injektive lineare Abbildung $\varepsilon\colon \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$, $x \mapsto \binom{x}{0}$ und die Sesquilinearform

$$\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C},\ (x,y) \mapsto \varepsilon(x)^* A \varepsilon(y).$$

Dass A hermitesch und positiv definit ist, impliziert, dass auch diese hermitesch und positiv definit ist. Aus der Definition von A_m folgt aber $\varepsilon(x)^*A\varepsilon(y) = x^*A_my$. Also ist A_m hermitesch und positiv definit. Die bereits bewiesene Implikation (a)⇒(b) auf A_m angewendet zeigt daher, dass alle Eigenwerte von A_m reell und positiv sind. Das Produkt dieser Eigenwerte ist aber $\det(A_m)$ und somit ebenfalls reell positiv.

(f)⇒(a): Wir benutzen Induktion über n. Im Fall $n = 0$ ist nichts zu beweisen. Sei also $n > 0$ und die Implikation bereits bewiesen für $n-1$. Dann gilt die Implikation insbesondere für A_{n-1}. Da die Hauptminoren von A_{n-1} genau die Hauptminoren $\det(A_m)$ für $1 \leqslant m \leqslant n-1$ von A sind, ist also A_{n-1} positiv definit. Die bereits bewiesene Implikation (a)⇒(c) auf A_{n-1} angewendet zeigt daher, dass $A_{n-1} = B^*B$ ist für eine invertierbare $(n-1)\times(n-1)$-Matrix B. Mit der $n \times n$-Blockmatrix $C := \left(\begin{smallmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt dann

$$\begin{aligned} C^*AC &= \begin{pmatrix} (B^{-1})^* & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{n-1} & * \\ * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (B^{-1})^*A_{n-1}B^{-1} & * \\ * & * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & * \\ * & * \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen $(C^*AC)^* = C^*A^*(C^*)^* = C^*AC$ ist diese Matrix wieder hermitesch. Also gilt genauer

$$C^*AC \;=\; \begin{pmatrix} I_{n-1} & w \\ w^* & \lambda \end{pmatrix}$$

für ein $w \in \mathbb{C}^{n-1}$ sowie ein $\lambda = \overline{\lambda} \in \mathbb{C}$, also ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Mit $D := \left(\begin{smallmatrix} I_{n-1} & -w \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)$ folgt dann

$$\begin{aligned} E \;:=\; D^*(C^*AC)D &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -w^* & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{n-1} & w \\ w^* & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{n-1} & -w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit $\mu := \lambda - w^*w \in \mathbb{R}$. Für dieses gilt dann

$$\begin{aligned} \mu &= \det(E) \;=\; \det(D^*C^*ACD) \;=\; \det(D^*)\det(C^*)\det(A)\det(C)\det(D) \\ &= \overline{\det(D)}\;\overline{\det(C)}\det(A)\det(C)\det(D) \;=\; \det(A)\cdot|\det(D)|^2\cdot|\det(C)|^2. \end{aligned}$$

Da D und C invertierbar sind, ist $\det(D) \cdot \det(C) \neq 0$ und somit $|\det(D)|^2 \cdot |\det(C)|^2 > 0$. Andererseits bedeutet der Spezialfall $m = n$ der Voraussetzung (f), dass $\det(A) > 0$ ist. Also ist $\mu > 0$. Somit ist die Matrix E positiv definit, zum Beispiel wegen der bereits bewiesenen Implikation (b)$\Rightarrow$(a). Da Positiv-Definitheit unter Basiswechsel invariant ist, ist also auch A positiv definit, was zu zeigen war.

4. Seien V und W endlichdimensionale unitäre Vektorräume und sei $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Die Singulärwerte von f sind definiert als die Quadratwurzeln der positiven Eigenwerte von $f^* \circ f$.

   Zeige: Eine Zahl $\sigma \in \mathbb{R}^{>0}$ ist ein Singulärwert von f genau dann, wenn gilt:

$$\exists\, v \in V \smallsetminus \{0\},\ \exists\, w \in W \smallsetminus \{0\} \colon f(v) = \sigma w \ \wedge\ f^*(w) = \sigma v\,.$$

   Lösung:

   ($\Rightarrow$) Sei σ ein Singulärwert von f. Dann gibt es einen Vektor $v \in V \smallsetminus \{0\}$ mit $f^*(f(v)) = \sigma^2 v$. Für $w := f(v)/\sigma$ folgt also

$$f(v) = \sigma w \qquad \text{und} \qquad f^*(w) = f^*(f(v))/\sigma = \sigma v\,.$$

   ($\Leftarrow$) Sei $\sigma > 0$ und seien $v \in V \smallsetminus \{0\}$ und $w \in W \smallsetminus \{0\}$ mit $f(v) = \sigma w$ und $f^*(w) = \sigma v$. Wegen $f^* f(v) = f^*(\sigma w) = \sigma^2 v$ ist σ^2 ein Eigenwert von $f^* f$, also $\sqrt{\sigma^2} = \sigma$ ein Singulärwert von f.

5. Bestimme eine Singulärwertzerlegung $A = QDR$ der komplexen Matrix

$$A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+2i & i & 0 \\ -i & 3+2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}.$$

   Lösung: Wir berechnen A^*A und erhalten

$$A^*A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 & 6i & 0 \\ -6i & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Wegen dem Eintrag unten rechts besitzt A^*A einen Eigenwert 1. Um die anderen Eigenwerte zu bestimmen berechnen wir das charakteristische Polynom der oberen linken 2×2-Matrix. Dieses ist $(X - \frac{14}{4})(X - \frac{14}{4}) + \frac{(6i)^2}{16} = X^2 - 7X + 10 = (X-5)(X-2)$. Also hat A^*A die Eigenwerte 5, 2 und 1. Daraus schliessen wir, dass A die Singulärwerte $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$ und 1 besitzt und die Matrix D gleich

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Die normierten Eigenvektoren von A^*A zu den Eigenwerten 5 bzw. 2 bzw. 1 sind

$$u_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_2 := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Eigenvektoren sind die Spalten der Matrix R^*, also ist

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix Q finden wir durch Lösen der Matrixgleichung $AR^* = QD$. Wir finden

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2+i}{\sqrt{10}} & \frac{1+i}{2} & 0 \\ \frac{1-2i}{\sqrt{10}} & \frac{i-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir schliesslich die Singulärwertzerlegung

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3+2i & i & 0 \\ -i & 3+2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2+i}{\sqrt{10}} & \frac{1+i}{2} & 0 \\ \frac{1-2i}{\sqrt{10}} & \frac{i-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$