Musterlösung Serie 23

Normale Endomorphismen und Isometrien

1. Seien f und g zwei normale Endomorphismen eines endlichdimensionalen unitären Vektorraumes V. Zeige: Falls f und g kommutieren, so

   (a) kommutieren f, g, f^*, und g^* alle miteinander.

   (b) ist $f + g$ normal.

   (c) ist $f \circ g$ normal.

   (d) Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist λf normal.

   Lösung: Der Kürze wegen lassen wir das Zeichen „$\circ$" für die Komposition von Abbildungen weg.

   (a) Nach dem Spektralsatz für normale Endomorphismen sind f und g einzeln diagonalisierbar. Da sie miteinander kommutieren, sind sie nach Aufgabe 2 (c) von Serie 14 folglich auch simultan diagonalisierbar, das heisst, es gibt eine Basis B von V, die aus simultanen Eigenvektoren von f und g besteht. Nach einem Satz aus §11.13 der Zusammenfassung ist jeder Eigenvektor von f aber auch ein Eigenvektor von f^*. Dasselbe gilt genauso für g und g^*; somit besteht B aus simultanen Eigenvektoren von f, g, f^*, und g^*. Daher sind die Darstellungsmatrizen ${}_B[f]_B$, ${}_B[g]_B$, ${}_B[f^*]_B$ und ${}_B[g^*]_B$ alle Diagonalmatrizen. Somit kommutieren sie miteinander, und folglich kommutieren auch f, g, f^*, und g^* alle miteinander.

   (b) Aus (a) folgt

   $$\begin{aligned}(f+g)(f+g)^* &= (f+g)(f^*+g^*) = ff^* + fg^* + gf^* + gg^* \\ &= f^*f + g^*f + f^*g + g^*g = (f+g)^*(f+g),\end{aligned}$$

   also ist $f + g$ normal.

   (c) Aus (a) folgt

   $$(fg)(fg)^* = fgg^*f^* = g^*f^*fg = (fg)^*(fg),$$

   also ist fg normal.

   (d) Es gilt

   $$(\lambda f)(\lambda f)^* = (\lambda f)(\overline{\lambda} f^*) = \overline{\lambda}\lambda f^*f = (\lambda f)^*(\lambda f),$$

   und daher ist λf normal.

2. Beweise oder widerlege: Jeder normale Endomorphismus f eines unitären Vektorraumes V ist eine Linearkombination von miteinander kommutierenden selbstadjungierten Endomorphismen.

Lösung: Die Aussage ist richtig: Für $g := \frac{1}{2}(f+f^*)$ und $h := \frac{1}{2i}(f-f^*)$ berechnen wir

$$\begin{aligned} g^* &= \tfrac{1}{2}(f^*+f) = g, \\ h^* &= \tfrac{1}{-2i}(f^*-f) = \tfrac{1}{2i}(f-f^*) = h. \end{aligned}$$

Somit sind g und h selbstadjungiert. Da f normal ist, gilt weiter (unter Weglassen des Zeichens „$\circ$" für die Komposition):

$$\begin{aligned} gh &= \tfrac{1}{4i}(f+f^*)(f-f^*) = \tfrac{1}{4i}(f^2 - ff^* + f^*f - (f^*)^2) \\ &= \tfrac{1}{4i}(f^2 - f^*f + ff^* - (f^*)^2) = \tfrac{1}{4i}(f-f^*)(f+f^*) = hg, \end{aligned}$$

also kommutieren g und h. Zudem gilt

$$g + ih = \tfrac{1}{2}(f+f^*) + \tfrac{1}{2}(f-f^*) = f,$$

wie gewünscht.

Aliter im Fall $\dim_{\mathbb{C}}(V) < \infty$*:* Nach dem Spektralsatz existiert eine geordnete Orthonormalbasis B, so dass die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ eine Diagonalmatrix ist. Seien U der Realteil und V der Imaginärteil von ${}_B[f]_B$, und seien g und h die Endomorphismen mit Darstellungsmatrix ${}_B[g]_B = U$ und ${}_B[h]_B = V$. Als reelle Diagonalmatrizen sind U und V selbstadjungiert; somit sind g und h selbstadjungiert. Da U und V miteinander kommutieren, kommutieren auch g und h. Aus der Gleichung ${}_B[f]_B = U + iV$ folgt schliesslich $f = g + ih$, wie gewünscht.

3. Betrachte den unitären Vektorraum $V := \mathbb{C}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Finde Endomorphismen f und g von V mit der Eigenschaft:

   (a) f ist normal, aber nicht selbstadjungiert.

   (b) f ist diagonalisierbar, aber nicht normal.

   (c) f^2 ist normal, aber f nicht.

   (d) f und g sind normal, aber $f+g$ nicht.

   Lösung: Wir repräsentieren f und g durch Matrizen A und B wie folgt:

   (a) Die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{smallmatrix}\right)$ hat Adjungierte $A^* = \left(\begin{smallmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$. Weil diese Matrizen verschieden sind, aber kommutieren, ist A normal, aber nicht selbstadjungiert.

   (b) Für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ gilt $AA^* = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right) = A^*A$, also ist A nicht normal. Jedoch ist A diagonalisierbar, weil sie die zwei verschiedenen Eigenwerte 1 und 2 besitzt.

(c) Für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt $A^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, und als Einheitsmatrix ist A^2 normal. Jedoch ist $AA^* = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = A^*A$, also ist A nicht normal.

(d) Die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist selbstadjungiert und daher normal. Für $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt $BB^* = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = B^*B$, also ist B normal. Hingegen gilt $(A+B)(A+B)^* = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right) = (A+B)^*(A+B)$, also ist $A + B$ nicht normal.

4. Sei A eine symmetrische positiv definite reelle Matrix. Zeige, dass eine eindeutige symmetrische reelle Matrix B existiert mit $\exp(B) = A$.

Lösung: Zunächst zur Eindeutigkeit: Falls B existiert, existiert nach dem Spektralsatz eine orthogonale Matrix Q, so dass $Q^{-1}BQ$ eine Diagonalmatrix ist mit Diagonaleinträgen $\mu_k \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}\left(\sum_{k\geqslant 0} \frac{B^k}{k!}\right) Q = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(Q^{-1}BQ)^k}{k!} = \exp(Q^{-1}BQ)$$

eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen e^{μ_k}. Also ist der Eigenraum von B zu jedem Eigenwert $\mu \in \mathbb{R}$ gleich dem Eigenraum von A zum Eigenwert e^μ. Wegen der Injektivität der reellen Exponentialfunktion ist zudem $\mu \in \mathbb{R}$ durch e^μ bestimmt. Da ausserdem B durch seine Eigenräume und Eigenwerte bestimmt ist, folgt die Eindeutigkeit von B.

Die so gefundene Beschreibung von B können wir umgekehrt zur Konstruktion von B benutzen, nämlich: Wähle nach dem Spektralsatz eine orthogonale Matrix Q mit $Q^{-1}AQ$ diagonal mit Diagonaleinträgen $\lambda_k \in \mathbb{R}$. Da A positiv definit ist, gilt dann $\lambda_k > 0$ und es existieren eindeutige $\mu_k \in \mathbb{R}$ mit $e^{\mu_k} = \lambda$. Für die symmetrische Matrix $B := Q \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \cdot Q^{-1}$ gilt somit

$$\exp(B) = Q \cdot \exp\big(\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\big) \cdot Q^{-1} = Q \cdot \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n) \cdot Q^{-1} = A\,.$$

5. Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass A orthogonal und $\det A = 1$ ist.

(b) Bestimme die Drehachse und den Drehwinkel von L_A.

Lösung:

(a) Durch direktes Ausrechnen zeigt man $A^TA = I_3$ und $\det A = 1$.

(b) Nach dem Satz vom Fussball ist die Abbildung L_A eine Drehung. Die Drehachse ist enthalten im Eigenraum von A zum Eigenwert 1, den wir bestimmen als

$$\mathrm{Eig}_{1,A} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Weiter existiert eine geordnete Orthonormalbasis B mit

$$_B[A]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

für einen Drehwinkel $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Es folgt

$$1 + 2\cos\varphi \;=\; \mathrm{Spur}\ {}_B[A]_B \;=\; \mathrm{Spur}\ A \;=\; -\frac{2}{3},$$

also

$$\varphi \;=\; \arccos(-5/6) \;=\; \pi - \arccos(5/6) \;\approx\; 146.44°.$$

6. Zeige: Für jeden orthogonalen Endomorphismus f eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V gilt

$$|\,\mathrm{Spur}(f)| \leqslant n.$$

Für welche f gilt Gleichheit?

Lösung: Nach dem Spektralsatz existiert eine geordnete Orthonormalbasis B von V, so dass die Darstellungsmatrix von f bezüglich B die Form

$$_BM_B(f) = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_r \end{pmatrix}$$

hat, wobei D_k gleich ± 1 oder gleich $\left(\begin{smallmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{smallmatrix}\right)$ ist mit $a_k^2 + b_k^2 = 1$. Im ersten Fall gilt $|\,\mathrm{Spur}(D_k)| = 1$ und im zweiten Fall $|\,\mathrm{Spur}(D_k)| = |2a_k| \leqslant 2$. Zusammen gilt daher

$$|\,\mathrm{Spur}(f)| = |\sum_{k=1}^{r} \mathrm{Spur}(D_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{r} |\,\mathrm{Spur}(D_k)| \leqslant n.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn für alle D_k vom zweiten Typ $|\,\mathrm{Spur}(D_k)| = 2$ gilt und wenn alle Diagonaleinträge von $_B[f]_B$ das gleiche Vorzeichen besitzen. Dies ist genau dann der Fall, wenn $f = \pm\,\mathrm{id}_V$ ist.

Aliter ohne Spektralsatz: Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine beliebige geordnete Orthonormalbasis von V. Für jedes $1 \leqslant j \leqslant n$ gilt dann

$$f(b_j) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, f(b_j)\rangle \cdot b_i.$$

Somit hat f die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B = (\langle b_i, f(b_j)\rangle)_{ij}$. Daraus folgt

$$\mathrm{Spur}(f) \;=\; \mathrm{Spur}({}_B[f]_B) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, f(b_i)\rangle.$$

Da f orthogonal ist, gilt für jedes i nun aber $\|b_i\| = \|f(b_i)\| = 1$. Nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung haben wir daher $|\langle b_i, f(b_i)\rangle| \leqslant 1$. Durch Aufsummieren folgt daraus $|\,\mathrm{Spur}(f)| \leqslant n$, wie gewünscht.

Ausserdem gilt $|\,\mathrm{Spur}(f)| = n$ genau dann, wenn die reellen Zahlen $\langle b_i, f(b_i)\rangle$ alle gleich 1 oder alle gleich -1 sind. In diesem Fall haben wir für jedes i auch Gleichheit in der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, und daher ist $f(b_i)$ linear abhängig von b_i. Somit ist $f(b_i) = b_i$ für alle i, oder $f(b_i) = -b_i$ für alle i, also $f = \pm\,\mathrm{id}_V$.

*7. Betrachte die folgenden zwei Ebenen in $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 := \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{und} \qquad E_2 := \left\langle \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle.$$

Finde alle Drehungen T von $\mathbb{R}^3$ mit $T(E_1) = E_2$.

(Für die Endrechnung dürfen Sie gerne ein Computeralgebrasystem benutzen.)

Lösung: Zunächst bestimmen wir zwei Orthonormalbasen v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2, w_3 von $\mathbb{R}^3$ mit $v_1, v_2 \in E_1$ und $w_1, w_2 \in E_2$. Dies liefert orthogonale Matrizen $M_1 := (v_1 v_2 v_3)$ und $M_2 := (w_1 w_2 w_3)$. Diese haben Determinante ± 1, und nach etwaigem Ersetzen von v_3 durch $-v_3$, beziehungsweise von w_3 durch $-w_3$, können wir erreichen, dass $\det(M_1) = \det(M_2) = 1$ ist.

Sodann erinnern wir uns daran, dass die Drehungen von $\mathbb{R}^3$ die Gruppe $\mathrm{SO}(3)$ aller orthogonalen Matrizen mit Determinante 1 bilden. Insbesondere ist jede Komposition von Drehungen und die Inverse jeder Drehung wieder eine Drehung, und nach Konstruktion sind M_1 und M_2 Drehungen.

Sei nun E_0 der von den Standardbasisvektoren e_1, e_2 aufgespannte Unterraum. Nach Konstruktion gilt dann $M_1 E_0 = E_1$ und $M_2 E_0 = E_2$. Für eine beliebige Drehung T gilt dann

$$TE_1 = E_2 \quad\Longleftrightarrow\quad TM_1E_0 = M_2E_0 \quad\Longleftrightarrow\quad M_2^{-1}TM_1E_0 = E_0.$$

Also ist $D := M_2^{-1}TM_1$ eine Drehung mit $DE_0 = E_0$, und $T = M_2DM_1^{-1}$.

Es bleibt daher, alle Drehungen D mit $DE_0 = E_0$ zu bestimmen. Eine solche Drehung muss auch das orthogonale Komplement von E_0 in sich abbilden. Dieses ist von dem Standardbasisvektor e_3 erzeugt. Wegen $\|De_3\| = \|e_3\| = 1$ muss dann $De_3 = \pm e_3$ sein.

Im Fall $De_3 = e_3$ ist D eine Drehung um die Achse $\mathbb{R}e_3$, und alle solchen sind gegeben durch die Matrizen

$$D_\varphi := \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für $(a, b) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$. Sodann ist

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Drehung mit $SE_0 = E_0$ und $Se_3 = -e_3$. Im Fall $De_3 = -e_3$ ist daher $S^{-1}D$ eine Drehung mit $S^{-1}DE_0 = E_0$ und $S^{-1}De_3 = e_3$. Somit ist $S^{-1}D = D_\varphi$ für ein φ und damit $D = SD_\varphi$. Die Menge aller Drehungen D mit $DE_0 = E_0$ ist daher

$$\big\{D_\varphi \bigm| \varphi \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{SD_\varphi \bigm| \varphi \in \mathbb{R}\big\}.$$

Die Menge aller Drehungen T mit $TE_1 = E_2$ ist also schlussendlich

$$\big\{M_2 D_\varphi M_1^{-1} \bigm| \varphi \in \mathbb{R}\big\} \cup \big\{M_2 S D_\varphi M_1^{-1} \bigm| \varphi \in \mathbb{R}\big\}.$$

Konkrete Zahlenwerte finden wir mit dem Gram-Schmidt-Verfahren. Dies liefert zum Beispiel die Vektoren

$$v_1 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$w_1 := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_2 := \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_3 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

für die schon $\det(M_1) = \det(M_2) = 1$ ist. Für diese ist dann

$$T \;=\; M_2 D_\varphi M_1^{-1} \;=\; M_2 D_\varphi M_1^T \;=$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 4a + \sqrt{2}b + 6 & (4 - \sqrt{3})a + (\sqrt{2} + 2\sqrt{6})b - 3 & (4 + \sqrt{3})a + (\sqrt{2} - 2\sqrt{6})b - 3 \\ 4a - 4\sqrt{2}b & 2(1 + 2\sqrt{3})a + (\sqrt{6} - 4\sqrt{2})b & 2(1 - 2\sqrt{3})a - (\sqrt{6} + 4\sqrt{2})b \\ 4a + \sqrt{2}b - 6 & (4 - \sqrt{3})a + (\sqrt{2} + 2\sqrt{6})b + 3 & (4 + \sqrt{3})a + (\sqrt{2} - 2\sqrt{6})b + 3 \end{pmatrix}$$

oder

$$T \;=\; M_2 S D_\varphi M_1^{-1} \;=\; M_2 S D_\varphi M_1^T \;=$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 4a - \sqrt{2}b - 6 & (4 + \sqrt{3})a + (2\sqrt{6} - \sqrt{2})b + 3 & (4 - \sqrt{3})a - (\sqrt{2} + 2\sqrt{6})b + 3 \\ 4\sqrt{2}b + a & 2(-2\sqrt{3} + 1)a + (\sqrt{6} + 4\sqrt{2})b & 2(1 + 2\sqrt{3})a - (\sqrt{6} - 4\sqrt{2})b \\ 4a - \sqrt{2}b + 6 & (4 - \sqrt{3})a + (2\sqrt{6} - \sqrt{2})b - 3 & (4 - \sqrt{3})a - (\sqrt{2} + 2\sqrt{6})b - 3 \end{pmatrix}.$$

*8. *Beispiel zur speziellen Relativitätstheorie.* Definiere die symmetrische Bilinearform $s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ für alle $v = (x, y, z, t)^T$ und $v' = (x', y', z', t')^T$ in $\mathbb{R}^4$ durch

$$s(v, v') := xx' + yy' + zz' - ctt',$$

wobei $c > 0$ ein fester Parameter ist. Der Raum $M := (\mathbb{R}^4, s)$ heisst die *Minkowski-Raumzeit* und der Parameter c heisst die *Lichtgeschwindigkeit.* Wir werden die Normalisierung $c = 1$ verwenden.

Eine lineare Abbildung $F : M \to M$ heisst eine *Isometrie* oder eine *Lorentztransformation*, falls gilt

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^4\colon\ s\big(F(v), F(w)\big) = s(v, w)\,.$$

(a) Beweise, dass jede Isometrie bijektiv ist.

(b) Beweise, dass die folgenden Endomorphismen Isometrien von M sind:

(i) Die Linksmultiplikation mit $\left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \end{array}\right)$ für jedes $T \in O(3)$.

(ii) Ein *Lorentzboost* in x-Richtung mit der Geschwindigkeit $v < c = 1$, gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} \gamma & & & -v\gamma \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -v\gamma & & & \gamma, \end{pmatrix}$$

für $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2}$.

**(c) Die Teilmenge $\{x \in M \mid s(x, x) = 0\}$ heisst der *Lichtkegel in M*. Beweise den „relativistischen Satz vom Fussball“: Jede lineare Isometrie φ mit $\det(\varphi) = 1$ besitzt einen Eigenvektor, der im Lichtkegel liegt.

Bemerkung. Für $c \to \infty$ nähert sich der Lichtkegel dem Unterraum $\{t = 0\}$ an und die Aussage reduziert sich auf den klassischen Fall.

Lösung:

(a) Sei $F\colon M \to M$ eine Isometrie, und sei $v = (x_1, \ldots, x_4)^T$ ein beliebiges Element im Kern von F. Bezeichne mit $e_1, \ldots, e_4$ die Standard-Basis von $M = \mathbb{R}^4$. Dann gilt für alle $i = 1, \ldots, 4$

$$\pm\, x_i \;=\; s(v, e_i) \;=\; s(F(v), F(e_i)) \;=\; s(0, e_i) \;=\; 0,$$

also $v = 0$. Somit ist $\mathrm{Kern}(F) = \{0\}$, und als Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraums ist F daher bijektiv.

(b) (i) Folgt durch direktes Nachrechnen.

(ii) Für alle $v = (x, y, z, t)^T$ und $v' = (x', y', z', t')^T$ in M gilt

$$\begin{aligned} s(Bv, Bv') &= (\gamma x - v\gamma t)(\gamma x' - v\gamma t') + yy' + zz' - (-v\gamma x + \gamma t)(-v\gamma x' + \gamma t') \\ &= (\gamma^2 - v^2\gamma^2)xx' + yy' + zz' - (\gamma^2 - v^2\gamma^2)tt' \\ &= xx' + yy' + zz' - tt' \\ &= s(v, w)\,, \end{aligned}$$

also ist der Lorentzboost L_B eine Isometrie.

(c) Sei $\varphi : M \to M$ eine lineare Isometrie mit $\det(\varphi) = 1$.

Schritt 1: Es existiert ein φ-invarianter Unterraum U der Dimension 2.

Beweis: Jeder irreduzible Faktor des charakteristischen Polynoms von φ hat den Grad 1 oder 2. Falls ein irreduzibler Faktor vom Grad 2 existiert, können wir die Jordan-Normalform von φ schreiben mit einem 2×2-Block links oben. Andernfalls haben alle irreduziblen Faktoren den Grad 1 und die Jordan-Normalform von φ ist eine obere Dreiecksmatrix. In beiden Fällen erzeugen die ersten beiden Basisvektoren einen φ-invarianten Unterraum der Dimension 2. □

Schritt 2: Das „orthogonale Komplement“

$$U^\perp = \{v \in M \mid \forall u \in U \colon s(u, v) = 0\}$$

ist ebenfalls ein φ-invarianter Unterraum der Dimension 2.

Beweis: Genauso wie im Fall eines Skalarprodukts, da s nicht entartet ist. □

Schritt 3: Es gilt $U \subsetneqq U^\perp$.

Beweis: Die Einschränkung von s auf den durch $t = 0$ definierten Unterraum V ist positiv definit. Ausserdem ist

$$\begin{aligned} \dim(U \cap V) &= \dim(U) + \dim(V) - \dim(U + V) \\ &\geqslant \dim(U) + \dim(V) - \dim(M) \;=\; 2 + 3 - 4 \;= 1. \end{aligned}$$

Also existiert ein von Null verschiedener Vektor $u \in U \cap V$, und für diesen ist $s(u, u) > 0$. Somit ist $u \notin U^\perp$.

Schritt 4: Beweis im Fall $U \cap U^\perp \neq 0$.

Beweis: Nach Schritt 1 und 2 ist $U \cap U^\perp$ wieder ein φ-invarianter Unterraum, und nach Schritt 3 hat er jetzt die Dimension 1. Jeder von Null verschiedene Vektor u darin ist daher ein Eigenvektor von φ. Nach Definition von $U^\perp$ erfüllt er ausserdem $s(u, u) = 0$, wie gewünscht. □

Ab jetzt nehmen wir $U \cap U^\perp = 0$ an. Dann gilt $M = U \oplus U^\perp$.

Schritt 5: Nach allfälligem Vertauschen von U und $U^\perp$ können wir annehmen, dass s auf U positiv definit und auf $U^\perp$ indefinit ist.

Beweis: Betrachte irgendeine geordnete Basis von U und ergänze sie um geordnete Basis von $U^\perp$ zu einer Basis B von M. Nach Definition von $U^\perp$ ist die Darstellungsmatrix $[s]_B$ dann eine Blockdiagonalmatrix mit Blöcken der Grösse 2. Die Signatur von s ist daher die Summe der Signaturen von $s|_{U\times U}$ und $s|_{U^\perp\times U^\perp}$. Da s die Signatur $(3,1)$ hat, muss eine dieser Einschränkungen die Signatur $(2,0)$ und die andere die Signatur $(1,1)$ haben. □

Schritt 6: Für die Einschränkungen der gegebenen Isometrie

$$\varphi_U := \varphi|_U : U \to U \qquad \text{und} \qquad \varphi_{U^\perp} := \varphi|_{U^\perp} : U^\perp \to U^\perp$$

gilt $\det(\varphi_U) = \det(\varphi_{U^\perp}) = \pm 1$.

Beweis: Die Einschränkung φ_U ist eine Isometrie bezüglich des Skalarprodukts $s|_{U\times U}$, also ist $\det(\varphi_U) = \pm 1$. Andererseits ist nach Voraussetzung

$$\det(\varphi_U)\cdot\det(\varphi_{U^\perp}) \;=\; \det(\varphi) \;=\; 1$$

Zusammen folgt daraus $\det(\varphi_{U^\perp}) = \det(\varphi_U)$. □

Schritt 7: Beweis im Fall $\det(\varphi_U) = \det(\varphi_{U^\perp}) = -1$.

Beweis: Hier ist φ_U eine Isometrie des 2-dimensionalen euklidischen Vektorraums U mit Determinante -1, also eine Spiegelung mit den Eigenwerten $+1$ und -1. Zum anderen ist $\varphi_{U^\perp}$ ein Endomorphismus des 2-dimensionalen reellen Vektorraums $U^\perp$ mit Determinante -1. Also zerfällt sein charakteristisches Polynom schon über $\mathbb{R}$ in Linearfaktoren, und daher existiert ein Eigenvektor $v \in U^\perp$, sagen wir zum Eigenwert λ. Ist $s(v,v) = 0$, so ist das schon der gesuchte Eigenvektor im Lichtkegel. Andernfalls zeigt die Rechnung

$$s(v,v) \;=\; s(\varphi(v),\varphi(v)) \;=\; s(\lambda v,\lambda v) \;=\; \lambda^2\cdot s(v,v),$$

dass $\lambda = \pm 1$ sein muss. Wegen $\det(\varphi_{U^\perp}) = -1$ muss $\varphi_{U^\perp}$ dann auch den Eigenwert $-1/\lambda = \mp 1$ haben. Zusammen zeigt dies, dass φ die Eigenwerte ± 1 jeweils mit Vielfachheit 2 hat.

Beide Eigenräume sind dann φ-invariante Unterräume der Dimension 2. Nachdem wir U und $U^\perp$ durch diese ersetzen, ist die Einschränkung $\varphi_{U^\perp}$ also skalar. Da aber $s|_{U^\perp\times U^\perp}$ indefinit ist, existiert ein Vektor $v \in U^\perp$ mit $s(v,v) = 0$. Dies ist der gesuchte Eigenvektor im Lichtkegel. □

Schritt 8: Beweis im Fall $\det(\varphi_U) = \det(\varphi_{U^\perp}) = 1$.

Beweis: Da $s|_{U^\perp\times U^\perp}$ indefinit ist, existiert eine Basis B von $U^\perp$ mit

$$[s|_{U^\perp\times U^\perp}]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für die Darstellungsmatrix $A := {}_B[\varphi_{U^\perp}]_B$ gilt dann $A^T \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\det(A) = 1$. Durch eine direkte Rechnung zeigt man, dass diese Bedingungen äquivalent sind zu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a^2 - b^2 = 1$. Der Spaltenvektor $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ entspricht daher einem Eigenvektor von $\varphi_{U^\perp}$ zum Eigenwert $a + b$ im Lichtkegel. $\square$