Musterlösung Serie 24

Multilineare Abbildungen, Tensorprodukt

1. Beweise die folgende Propositionen aus der Vorlesung mit allen Details:

   (a) Für alle K-Vektorräume $V_1, \ldots, V_r$ und W ist $\mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W)$ ein Unterraum des Raums aller Abbildungen $V_1 \times \cdots \times V_r \to W$.

   (b) Betrachte lineare Abbildungen von K-Vektorräumen $f_i \colon V_i' \to V_i$ für $1 \leqslant i \leqslant r$ sowie $g \colon W \to W'$. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W) &\to \mathrm{Mult}_K(V_1', \ldots, V_r'; W'), \\ \varphi &\mapsto g \circ \varphi \circ (f_1 \times \cdots \times f_r). \end{aligned}$$

Lösung:

(a) Für jede Wahl eines Index $1 \leqslant i \leqslant r$ und von Vektoren $v_j \in V_j$ für $j \neq i$ betrachte die Abbildung

$$\varepsilon : \ V_i \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_r, \quad v \mapsto (v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_r).$$

Wir merken uns, dass ε von der Wahl von $i, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r$ abhängt, auch wenn wir dies der Übersichtlichkeit wegen in der Notation unterdrücken. Nach Definition ist eine Abbildung $\varphi \colon V_1 \times \cdots \times V_r \to W$ multilinear genau dann, wenn für jede Wahl von $i, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r$ die zusammengesetzte Abbildung $\varphi \circ \varepsilon \colon V_i \to W$ linear ist.

Für die Null-Abbildung $\varphi_0 \colon V_1 \times \cdots \times V_r \to W$ ist $\varphi_0 \circ \varepsilon$ wieder die Null-Abbildung, also linear. Sodann seien $\varphi_1, \varphi_2 \colon V_1 \times \cdots \times V_r \to W$ multilineare Abbildungen und sei $\lambda \in K$. Dann sind $\varphi_1 \circ \varepsilon$ und $\varphi_2 \circ \varepsilon$ linear und folglich auch $(\varphi_1 + \varphi_2) \circ \varepsilon_i = \varphi_1 \circ \varepsilon_i + \varphi_2 \circ \varepsilon_i$ sowie $(\lambda \cdot \varphi_1) \circ \varepsilon = \lambda \cdot (\varphi_1 \circ \varepsilon)$, weil wir bereits wissen, dass jedes skalare Vielfache und jede Summe von linearen Abbildungen wieder linear ist. Durch Variieren von $i, v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r$ und somit von ε folgt, dass φ_0 und $\varphi_1 + \varphi_2$ und $\lambda \cdot \varphi_1$ multilinear sind.

Zusammen zeigt dies, dass $\mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W)$ ein Unterraum ist.

(b) Für jede Wahl eines Index $1 \leqslant i \leqslant r$ und von Vektoren $v_j' \in V_j'$ für $j \neq i$ betrachte die Abbildung

$$\varepsilon' : \ V_i' \longrightarrow V_1' \times \cdots \times V_r', \quad v' \mapsto (v_1', \ldots, v_{i-1}', v', v_{i+1}', \ldots, v_r').$$

Nach Definition ist eine Abbildung $\varphi'\colon V_1' \times \cdots \times V_r' \to W'$ multilinear genau dann, wenn für jede Wahl von $i, v_1', \ldots, v_{i-1}', v_{i+1}', \ldots, v_r'$ die zusammengesetzte Abbildung $\varphi' \circ \varepsilon'\colon V_i' \to W'$ linear ist. Setzen wir ausserdem $v_j := f_j(v_j')$ für alle $j \neq i$ und $\varepsilon\colon V_i \to V_1 \times \cdots \times V_r$ wie in (a), so gilt $(f_1 \times \cdots \times f_r) \circ \varepsilon' = \varepsilon \circ f_i$.

Betrachte nun eine multilineare Abbildung $\varphi \in \mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W)$. Für jede Wahl von $i, v_1', \ldots, v_{i-1}', v_{i+1}', \ldots, v_r'$ und folglich von ε' und ε wie oben ist dann $\varphi \circ \varepsilon\colon V_i \to W$ linear und folglich auch

$$g \circ \varphi \circ (f_1 \times \cdots \times f_r) \circ \varepsilon' = g \circ (\varphi \circ \varepsilon) \circ f_i$$

als Verknüpfung von linearen Abbildungen linear. Also ist $g \circ \varphi \circ (f_1 \times \cdots \times f_r)$ multilinear; die Abbildung in der Proposition ist daher wohldefiniert.

Schliesslich betrachte multilineare Abbildungen $\varphi_1,\ \varphi_2\colon V_1 \times \cdots \times V_r \to W$ und $\lambda \in K$. Weil g eine lineare Abbildung ist, folgt

$$g \circ (\lambda\varphi_1 + \varphi_2) \circ (f_1 \times \cdots \times f_r) = \lambda g \circ \varphi_1 \circ (f_1 \times \cdots \times f_r) + g \circ \varphi_2 \circ (f_1 \times \cdots \times f_r).$$

Also ist die Abbildung in der Proposition linear.

*2. Sei V ein Vektorraum der Dimension $n < \infty$, und sei f ein Endomorphismus von V mit dem charakteristischen Polynom $\mathrm{char}_f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Für alle $r \geqslant 0$ betrachte die induzierte Abbildung

$$\mathrm{Alt}^r(f)\colon\ \ \mathrm{Alt}_K^r(V, K) \to \mathrm{Alt}_K^r(V, K),\ \ \varphi \mapsto \varphi \circ (f \times \ldots \times f).$$

Zeige: Für alle $r = 0, \ldots, n$ gilt

$$a_{n-r} = (-1)^r \,\mathrm{Spur}\,\mathrm{Alt}^r(f).$$

Lösung: Sei $B := (b_1, \ldots, b_n)$ eine geordnete Basis von V und sei

$$A := (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} := {}_B M_B(f)$$

für Koeffizienten $a_{ij} \in K$ die Darstellungsmatrix von f bezüglich B. Für alle Indizes $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n$ sei

$$\varphi_{(i_1, \ldots, i_r)} : V \times \ldots \times V \to K$$

die eindeutige alternierende Abbildung mit

$$\varphi_{(i_1, \ldots, i_r)}(b_{j_1}, \ldots, b_{j_r}) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\sigma) & \text{falls } (j_1, \ldots, j_r) = (i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(r)}) \text{ für ein } \sigma \in S_r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $1 \leqslant j_1, \ldots, j_r \leqslant n$. Aus Kapitel 12.1 und 12.2 der Zusammenfassung und durch direktes Verifizieren folgt, dass

$$\left\{\varphi_{(i_1, \ldots, i_r)} \mid 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n\right\}$$

eine Basis von $\mathrm{Alt}^r_K(V,K)$ bildet. Ein beliebiges Element $\varphi \in \mathrm{Alt}^r_K(V,K)$ ist dann die Linearkombination

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \varphi(b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}) \cdot \varphi_{(i_1,\ldots,i_r)}.$$

(*Bemerkung für später:* Sei $\{b_i^\vee\}$ die duale Basis zu B. Mit der Notation aus Abschnitt 12.5 der Vorlesung und unter dem Isomorphismus $\mathrm{Alt}^r_K(V,K) \cong \bigwedge^r(V^\vee)$ entspricht $\varphi_{(i_1,\ldots,i_r)}$ dem Element $b_{i_1}^\vee \wedge \cdots \wedge b_{i_r}^\vee$ für alle $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n$.)

Mit dieser Formel und der Definition von $\varphi_{(i_1,\ldots,i_r)}$ berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spur}\,\mathrm{Alt}^r(f) &= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \mathrm{Alt}^r(f)(\varphi_{(i_1,\ldots,i_r)})(b_{i_1}, \ldots, b_{i_r}) \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \varphi_{(i_1,\ldots,i_r)}(f(b_{i_1}), \ldots, f(b_{i_r})) \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \sum_{k_1,\ldots,k_r=1}^{n} a_{k_1 i_1} \ldots a_{k_r i_r} \varphi_{(i_1,\ldots,i_r)}(b_{k_1}, \ldots, b_{k_r}) \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{i_{\sigma(1)} i_1} \ldots a_{i_{\sigma(r)} i_r} \\
&= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{i_1 i_{\sigma(1)}} \ldots a_{i_r i_{\sigma(r)}}
\end{aligned}$$

Andererseits gilt für das charakteristische Polynom von f

$$\begin{aligned}
\mathrm{char}_f(X) &= \det(X \cdot I_n - A) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot (X \cdot \delta_{1\sigma(1)} - a_{1\sigma(1)}) \cdots (X \cdot \delta_{n\sigma(n)} - a_{n\sigma(n)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \sum_{r=0}^{n} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} (-a_{i_1\sigma(i_1)}) \cdots (-a_{i_r\sigma(i_r)}) \cdot \prod_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \notin \{i_1,\ldots,i_r\}}} (X \cdot \delta_{j\sigma(j)}) \\
&= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r X^{n-r} \cdot \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{i_1\sigma(i_1)} \cdots a_{i_r\sigma(i_r)} \cdot \prod_{j \notin \{i_1,\ldots,i_r\}} \delta_{j\sigma(j)} \\
&= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r X^{n-r} \cdot \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant n} \sum_{\tau \in S_r} \mathrm{sgn}(\tau) a_{i_1 i_{\tau(1)}} \cdots a_{i_r i_{\tau(r)}}.
\end{aligned}$$

Durch Vergleichen des Koeffizienten von X^{n-r} mit unserem Ausdruck für $\mathrm{Spur}\,\mathrm{Alt}^r(f)$ erhalten wir

$$\sum_{r=0}^{n} a_{n-r} X^{n-r} \;=\; \mathrm{char}_f(X) \;=\; \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \,\mathrm{Spur}(\mathrm{Alt}^r(f)) X^{n-r},$$

also die Aussage der Aufgabe.

3. Sei $f : V \to V'$ eine lineare Abbildung. Zeige die folgenden universellen Eigenschaften:

   (a) f ist injektiv genau dann, wenn für alle Vektorräume W die Abbildung
   $$\mathrm{Hom}_K(W, V) \to \mathrm{Hom}_K(W, V'),\ g \mapsto f \circ g$$
   injektiv ist.

   (b) f ist surjektiv genau dann, wenn für alle Vektorräume W die Abbildung
   $$\mathrm{Hom}_K(V', W) \to \mathrm{Hom}_K(V, W),\ g \mapsto g \circ f$$
   injektiv ist.

   (c) $\mathrm{Kern}(f)$ ist der einzige Unterraum $U \subset V$ mit der Eigenschaft:

   Für alle Vektorräume W und alle linearen Abbildungen $g : W \to V$ gilt:
   $$f \circ g = 0 \iff \mathrm{Bild}(g) \subset U\,.$$

Lösung:

(a) Angenommen f ist injektiv. Für ein beliebigen Vektorraum W und zwei Homomorphismen $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_K(W, V)$ mit $f \circ g_1 = f \circ g_2$ gilt dann $f(g_1(x)) = f(g_2(x))$ für alle $x \in V$. Aus der Injektivität von f folgt $g_1(x) = g_2(x)$ für alle $x \in V$, also $g_1 = g_2$. Die Abbildung
$$\mathrm{Hom}_K(W, V) \to \mathrm{Hom}_K(W, V'),\ g \mapsto f \circ g$$
ist also injektiv.

Angenommen $\mathrm{Hom}_K(W, V) \to \mathrm{Hom}_K(W, V')$ ist injektiv für jeden Vektorraum W. Für beliebige Vektoren $v_1, v_2 \in V$ mit $f(v_1) = f(v_2)$ betrachte den Vektorraum $W := K$ und die linearen Abbildungen
$$\begin{aligned} g_1 :\ & K \to V,\quad x \mapsto xv_1; \\ g_2 :\ & K \to V,\quad x \mapsto xv_2. \end{aligned}$$
Nach Konstruktion gilt dann $f \circ g_1 = f \circ g_2$. Aus der Injektivität von $\mathrm{Hom}_K(W, V) \to \mathrm{Hom}_K(W, V')$ folgt daraus $g_1 = g_2$ und somit $v_1 = g_1(1) = g_2(1) = v_2$. Folglich ist f injektiv.

(b) Angenommen f ist surjektiv. Sei W ein beliebiger Vektorraum und seien $g_1, g_2 \in \mathrm{Hom}_K(V', W)$ zwei Homomorphismen mit $g_1 \circ f = g_2 \circ f$. Für jeden Vektor $v' \in V'$ existiert wegen der Surjektivität von f ein Vektor $v \in V$ mit $f(v) = v'$. Wegen $(g_1 \circ f)(v) = (g_2 \circ f)(v)$ folgt dann $g_1(v') = g_2(v')$. Da v' beliebig war, ist somit $g_1 = g_2$. Die Abbildung
$$\mathrm{Hom}_K(V', W) \to \mathrm{Hom}_K(V, W),\ g \mapsto g \circ f$$

ist also injektiv.

Angenommen f ist nicht surjektiv. Dann ist $\mathrm{Bild}(f) \subsetneqq V'$ und daher existiert eine nicht-verschwindende Linearform $\ell\colon V' \to K$ mit $\mathrm{Bild}(f) \subset \mathrm{Kern}(\ell)$. Es folgt $\ell \circ f(v) = 0$ für alle $v \in V$, also $\ell \circ f = 0$. Wegen $\ell \neq 0$ ist die Abbildung $\mathrm{Hom}_K(V', W) \to \mathrm{Hom}_K(V, W)$ also nicht injektiv.

(c) Wir zeigen zuerst, dass $\mathrm{Kern}(f)$ die genannte Eigenschaft erfüllt. Seien dafür W ein beliebiger Vektorraum und $g : W \to V$ ein Homomorphismus.

Falls $\mathrm{Bild}(g) \subset \mathrm{Kern}(f)$ ist, gilt für jedes $w \in W$ dann $g(w) \in \mathrm{Bild}(g)$, also $g(w) \in \mathrm{Kern}(f)$, also $f(g(w)) = 0$, und somit $f \circ g = 0$. Falls umgekehrt $f \circ g = 0$ ist, gilt $f(g(w)) = 0$ für alle $w \in W$, also $f(v) = 0$ für alle $v \in \mathrm{Bild}(g) = \{g(w) \mid w \in W\}$, und somit $\mathrm{Bild}(g) \subset \mathrm{Kern}(f)$. Also hat $\mathrm{Kern}(f)$ die genannte Eigenschaft.

Wir zeigen weiter, dass je zwei Unterräume mit dieser Eigenschaft gleich sind; insbesondere ist dann $\mathrm{Kern}(f)$ der einzige Unterraum mit der Eigenschaft:

Angenommen U_1, U_2 sind zwei Unterräume, welche die Eigenschaft erfüllen. Sei $\iota_2 : U_2 \to V$ die Inklusion. Es gilt $\mathrm{Bild}(\iota_2) = U_2 \subset U_2$, also wegen der Eigenschaft von U_2 folglich $f \circ \iota_2 = 0$, also wegen der Eigenschaft von U_1 angewendet auf ι_2 somit $U_2 \subset U_1$. Umgekehrt erhält man genauso $U_1 \subset U_2$, und damit $U_1 = U_2$, wie gewünscht.

4. Gegeben sei eine Menge I. Für ein Paar (U, ι) bestehend aus einem K-Vektorraum U und einer Abbildung $\iota\colon I \to U$ betrachte die folgende *universelle Eigenschaft*:

Für jeden K-Vektorraum V und für jede Abbildung $\varphi\colon I \to V$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon U \to V$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ U \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & V. \end{tikzcd}$$

(a) Zeige, dass für je zwei Paare (U, ι) und (U', ι') mit dieser universellen Eigenschaft ein eindeutiger Isomorphismus $\psi\colon U \xrightarrow{\sim} U'$ mit $\psi \circ \iota = \iota'$ existiert.

(b) Zeige, dass die universelle Eigenschaft gilt für den K-Vektorraum

$$K^{(I)} := \left\{ (x_i)_{i \in I} \in K^I \;\middle|\; x_i = 0 \text{ für fast alle } i \right\}$$

mit der Abbildung

$$\iota_I : I \to K^{(I)}, \quad i \mapsto (\delta_{ij})_{j \in I}\,.$$

Lösung:

(a) Die universelle Eigenschaft von (U, ι) angewandt auf die Abbildung $\iota'\colon I \to U'$ ergibt eine eindeutige lineare Abbildung $\psi\colon U \to U'$ mit $\psi \circ \iota = \iota'$. Wir zeigen, dass ψ ein Isomorphismus ist. Die universelle Eigenschaft von (U', ι') angewandt auf die Abbildung $\iota\colon I \to U$ ergibt eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi\colon U' \to U$ so dass $\varphi \circ \iota' = \iota$ ist. Es folgt

$$\begin{array}{rclclcll} \varphi \circ \psi \circ \iota & = & \varphi \circ \iota' & = & \iota & = & \mathrm{id}_U \circ \iota & \qquad \text{und} \\ \psi \circ \varphi \circ \iota' & = & \psi \circ \iota & = & \iota' & = & \mathrm{id}_{U'} \circ \iota. & \end{array}$$

Die Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft von (U, ι) angewandt auf $\varphi \circ \psi$ impliziert nun $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_U$, und die Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft von (U', ι') angewandt auf $\psi \circ \varphi$ zeigt $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{U'}$. Also ist φ ein beidseitiges Inverses von ψ, und somit ist ψ ein Isomorphismus.

(b) Betrachte eine beliebige Abbildung $\varphi\colon I \to V$. Aus dem Herbstsemester wissen wir, dass die Teilmenge $B := \{\, \iota_I(i) \mid i \in I \,\}$ eine Basis von $K^{(I)}$ ist. Die gesuchte lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon K^{(I)} \to V$ ist also eindeutig bestimmt durch ihre Einschränkung auf B, oder äquivalent durch die Komposition $\overline{\varphi} \circ i_I = \varphi$. Umgekehrt ist

$$\overline{\varphi}\colon K^{(I)} \to V,\ (x_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} x_i \varphi(i)$$

eine lineare Abbildung mit $\overline{\varphi}(\iota_I(i)) = \varphi(i)$ für alle $i \in I$. Damit sind die Eindeutigkeit und die Existenz gezeigt.

5. Zeige die Existenz des Tensorprodukts $V_1 \otimes V_2$ durch die folgende Konstruktion: Für jedes Paar $(v_1, v_2) \in V_1 \times V_2$ bezeichne mit $[v_1, v_2]$ die Funktion $V_1 \times V_2 \to K$ mit dem Wert 1 an der Stelle (v_1, v_2) und allen anderen Werten gleich 0. Diese Funktionen bilden eine Basis des K-Vektorraums $F := K^{(V_1 \times V_2)}$. Sei R der von allen Elementen der Form

$$\begin{array}{ll} [v_1 + v_1', v_2] - [v_1, v_2] - [v_1', v_2], & \quad [\lambda v_1, v_2] - \lambda \cdot [v_1, v_2], \\ [v_1, v_2 + v_2'] - [v_1, v_2] - [v_1, v_2'], & \quad [v_1, \lambda v_2] - \lambda \cdot [v_1, v_2], \end{array}$$

für alle $v_1, v_1' \in V_1$ und $v_2, v_2' \in V_2$ und $\lambda \in K$ erzeugte Unterraum. Betrachte die Abbildung

$$\kappa\colon\ V_1 \times V_2 \to F/R,\quad (v_1, v_2) \mapsto [v_1, v_2] + R.$$

Zeige, dass das Paar $(F/R, \kappa)$ die universelle Eigenschaft für das Tensorprodukt $V_1 \otimes V_2$ erfüllt.

Lösung: Seien V ein K-Vektorraum und $\varphi\colon V_1 \times V_2 \to V$ eine bilineare Abbildung. Weil die Elemente $[v_1, v_2]$ eine Basis von F bilden, existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\psi\colon F \to V$ mit $\psi([v_1, v_2]) = \varphi(v_1, v_2)$ für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ (vermittels der universellen Eigenschaft einer Basis oder mit Aufgabe 4 oben). Weil φ bilinear ist, gilt für alle $v_1, v_1', v_2, v_2', \lambda$:

$$\psi([v_1 + v_1', v_2] - [v_1, v_2] - [v_1', v_2]) = \varphi(v_1 + v_1', v_2) - \varphi(v_1, v_2) - \varphi(v_1', v_2) = 0,$$

$$\psi([v_1, v_2 + v_2'] - [v_1, v_2] - [v_1, v_2']) = \varphi(v_1, v_2 + v_2') - \varphi(v_1, v_2) - \varphi(v_1, v_2') = 0,$$
$$\psi([\lambda v_1, v_2] - \lambda[v_1, v_2]) = \varphi(\lambda v_1, v_2) - \lambda\varphi(v_1, v_2) = 0,$$
$$\psi([v_1, \lambda v_2] - \lambda[v_1, v_2]) = \varphi(v_1, \lambda v_2) - \lambda\varphi(v_1, v_2) = 0.$$

Also liegen die gewählten Erzeugenden von R, und somit auch R selbst, im Kern von ψ. Wegen der universellen Eigenschaft der Projektion auf den Quotientenvektorraum $\pi\colon F \to F/R$ existiert daher eine eindeutige lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon F/R \to V$ mit $\overline{\varphi} \circ \pi = \psi$. Für diese folgern wir daraus die Gleichung $\overline{\varphi} \circ \kappa = \varphi$.

Umgekehrt impliziert diese Gleichung, dass $\overline{\varphi}(\pi([v_1, v_2])) = \varphi(v_1, v_2)$ sein muss. Somit ist $\overline{\varphi}$ auf den Erzeugenden $\pi([v_1, v_2])$ von F/R eindeutig bestimmt, und damit auch selbst schon eindeutig bestimmt.

Insgesamt zeigt dies, dass das Paar $(F/R, \kappa)$ die universelle Eigenschaft für das Tensorprodukt $V_1 \otimes V_2$ erfüllt.

6. Vereinfache den folgenden Ausdruck in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$.

$$-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$$

Lösung: Wir drücken jeweils den ersten Faktor als Linearkombination der Standardbasisvektoren $\binom{1}{0}$ und $\binom{0}{1}$ aus, benutzen die Linearität des Tensorprodukts in der ersten Variablen, und fassen dann alle Terme mit demselben ersten Faktor zusammen unter Benutzung der Linearität des Tensorprodukts in der zweiten Variablen. Wir rechnen also

$$\begin{aligned}
-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} &= \left((-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) \otimes \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-6\\2\\-4\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \\
2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Für den gewünschten Ausdruck erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-6\\2\\-4\end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} \\
= \quad & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix}-3\\1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix} \right) \\
& + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix}-6\\2\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\-2\\2\end{pmatrix} \right) \\
= \quad & \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

*7. Folgere direkt aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts, dass $V_1 \otimes V_2$ von den *reinen Tensoren* $v_1 \otimes v_2$ für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ erzeugt wird.

Lösung: Sei $\kappa\colon V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$, $(v_1, v_2) \mapsto v_1 \otimes v_2$ die bilineare Abbildung, die zum Tensorprodukt gehört. Sei T der Unterraum von $V_1 \otimes V_2$, der von dem Bild von κ erzeugt wird. Wir müssen zeigen, dass $T = V_1 \otimes V_2$ ist.

Nach Konstruktion von T faktorisiert κ bereits durch eine bilineare Abbildung $\varphi\colon V_1 \times V_2 \to T$. Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes existiert also eine lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon V_1 \otimes V_2 \to T$, so dass $\varphi = \overline{\varphi} \circ \kappa$ ist. Durch Komposition mit der Inklusion $\iota\colon T \hookrightarrow V_1 \otimes V_2$ erhalten wir eine lineare Abbildung $\iota \circ \overline{\varphi}\colon V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2$, für welche die Gleichung

$$\iota \circ \overline{\varphi} \circ \kappa \;=\; \iota \circ \varphi \;=\; \kappa \;=\; \mathrm{id}_{V_1 \otimes V_2} \circ \kappa$$

gilt. Hier sind $\iota \circ \overline{\varphi}$ und $\mathrm{id}_{V_1 \otimes V_2}$ lineare Abbildungen $V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2$, welche nach Komposition mit κ dieselben bilinearen Abbildungen $V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$ induzieren. Die Eindeutigkeit in der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes impliziert daher $\iota \circ \overline{\varphi} = \mathrm{id}_{V_1 \otimes V_2}$. Somit ist ι surjektiv und daher $T = V_1 \otimes V_2$.