Musterlösung Serie 25

Tensorprodukt, Körpererweiterungen

1. Betrachte Vektorräume V_1 und V_2 mit $0 < n := \min\{\dim_K(V_1), \dim_K(V_2)\} < \infty$. Zeige, dass jeder Tensor in $V_1 \otimes_K V_2$ eine Summe von n reinen Tensoren ist, aber im allgemeinen nicht von $n-1$ reinen Tensoren.

   Lösung: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $n = \dim_K(V_2) \leqslant \dim_K(V_1)$ annehmen. Sei $\{b_i\}_{i\in I}$ eine Basis von V_1 und sei $\{b'_1, \ldots, b'_n\}$ eine Basis von V_2. Dann ist
$$\{\, b_i \otimes b'_j \mid i \in I,\, 1 \leqslant j \leqslant n\}$$
   eine Basis von $V_1 \otimes V_2$. Jeder Vektor $v \in V_1 \otimes V_2$ lässt sich daher schreiben als
$$v = {\sum_{i\in I}}' \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_i \otimes b'_j$$
   für eindeutige Koeffizienten $a_{ij} \in K$. Mit $v_j := \sum'_{i\in I} a_{ij} b_i \in V_1$ für alle j folgt
$$v = \sum_{j=1}^{n} v_j \otimes b'_j.$$
   Also ist v die Summe der n reinen Tensoren $v_1 \otimes b'_1, \ldots, v_n \otimes b'_n$.

   Wir müssen weiter zeigen, dass ein Tensor existiert, welcher nicht die Summe von $n-1$ reinen Tensoren ist. Wegen $\dim(V_1) \geqslant \dim(V_2)$ können wir dabei $\{1, \ldots, n\} \subset I$ annehmen.

   Behauptung. Der Tensor $v := \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes b'_i$ lässt sich nicht als Summe von $n-1$ reinen Tensoren schreiben.

   Beweis. Angenommen, es sei $v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes w_i$ für Vektoren $v_i \in V_1$ und $w_i \in V_2$. Aus Dimensionsgründen existiert dann eine nicht-verschwindende Linearform $\ell\colon V_2 \to K$ mit $\ell(w_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$. Durch Anwenden der linearen Abbildung $\mathrm{id}_{V_1} \otimes \ell\colon V_1 \otimes_K V_2 \to V_1 \otimes_K K$ erhalten wir
$$\sum_{i=1}^{n} \ell(b'_i) \cdot (b_i \otimes 1) \;=\; \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes \ell(b'_i) \;=\; (\mathrm{id}_{V_1} \otimes \ell)(v) \;=\; \sum_{i=1}^{n-1} v_i \otimes \ell(w_i) \;=\; 0.$$
   Da die Vektoren $b_i \otimes 1$ für alle $i \in I$ eine Basis von $V_1 \otimes_K K$ bilden, folgt daraus $\ell(b'_i) = 0$ für alle i. Da andererseits die b'_i eine Basis von V_2 bilden, folgt daraus $\ell = 0$, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

2. Zeige: Für alle K-Vektorräume V und W existiert ein natürlicher injektiver Homomorphismus
$$V^\vee \otimes W^\vee \hookrightarrow (V \otimes W)^\vee.$$
Dieser ist ein Isomorphismus genau dann, wenn V oder W endlich-dimensional ist.

Lösung: Nach einer Proposition der Vorlesung existiert ein natürlicher injektiver Homomorphismus
$$\varphi\colon V^\vee \otimes_K W^\vee \to \mathrm{Hom}_K(V, W^\vee) \ \text{ mit } \ \ell \otimes m \mapsto (v \mapsto \ell(v) \cdot m).$$
Andererseits liefert die Adjunktionsformel einen natürlichen Isomorphismus
$$\psi\colon \ \mathrm{Hom}_K(V, W^\vee) = \mathrm{Hom}_K(V, \mathrm{Hom}_K(W, K)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, K) = (V \otimes W)^\vee.$$
Somit ist die zusammengesetzte Abbildung $\psi \circ \varphi$ ein natürlicher injektiver Homomorphismus $V^\vee \otimes W^\vee \to (V \otimes W)^\vee$.

Nach der Vorlesung ist das Bild von φ der Unterraum aller Homomorphismen von endlichem Rang. Dieser Unterraum ist gleich $\mathrm{Hom}_K(V, W^\vee)$ genau dann, wenn V oder $W^\vee$ endlich-dimensional ist. Aber $W^\vee$ ist endlich-dimensional genau dann, wenn W endlich-dimensional ist. Da ψ immer ein Isomorphismus ist, ist folglich $\psi \circ \varphi$ ein Isomorphismus genau dann, wenn V oder W endlich-dimensional ist.

3. Sei V ein Vektorraum der Dimension n und sei t ein Element von $V \otimes_K V$. Seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ geordnete Basen von V und schreibe
$$t \ = \ \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot b_i \otimes b_j \ = \ \sum_{i,j=1}^{n} \alpha'_{ij} \cdot b'_i \otimes b'_j$$
mit eindeutigen Koeffizienten $\alpha_{ij}, \alpha'_{ij} \in K$. Beschreibe die Beziehung zwischen den Matrizen
$$A := (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \qquad \text{und} \qquad A' := (\alpha'_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$
in Termen der Basiswechselmatrix ${}_{B'}[\mathrm{id}]_B$.

Lösung: Die Matrix $M := {}_{B'}[\mathrm{id}]_B = (m_{ij})_{i,j}$ ist charakterisiert durch die Formel $b_i = \sum_{k=1}^n m_{ki} b'_k$ für alle i. Es folgt
$$\begin{aligned} t \ = \ \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, b_i \otimes b_j \ &= \ \sum_{i,j} \alpha_{ij} \Big(\sum_k m_{ki} b'_k \Big) \otimes \Big(\sum_\ell m_{\ell j} b'_\ell \Big) \\ &= \ \sum_{i,j,k,\ell} \alpha_{ij} m_{ki} m_{\ell j}\, b'_k \otimes b'_\ell \\ &= \ \sum_{k,\ell} \Big(\sum_{i,j} \alpha_{ij} m_{ki} m_{\ell j} \Big) b'_k \otimes b'_\ell \,. \end{aligned}$$

Da $\{b'_i \otimes b'_j \mid i,j = 1,\ldots,n\}$ eine Basis von $V \otimes V$ bildet, folgt für alle k,ℓ

$$\alpha'_{k\ell} = \sum_{i,j} m_{ki}\alpha_{ij}m_{\ell j}.$$

In Matrizen bedeutet dies $A' = M \cdot A \cdot M^T$.

*4. Beweise: Für jeden Vektorraum V und für jede Menge $\{W_i\}_{i\in I}$ von Vektorräumen W_i existiert ein natürlicher Isomorphismus

$$V \otimes_K \left(\boxplus_{i\in I} W_i \right) \xrightarrow{\cong} \boxplus_{i\in I} (V \otimes_K W_i)$$

Lösung: Wir schreiben $\sum'_{i\in I} v_i X_i$ für Elemente $(v_i)_{i\in I}$ einer äusseren direkten Summe $\boxplus_{i\in I} V_i$ von Vektorräumen V_i.

Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi \colon V \times \left(\boxplus_{i\in I} W_i \right) &\to \boxplus_{i\in I} (V \otimes_K W_i) \\ \left(v \,,\, \sum_{i\in I}{}' w_i X_i \right) &\longmapsto \sum_{i\in I}{}' (v \otimes w_i) X_i \,. \end{aligned}$$

Man zeigt direkt, dass φ bilinear ist. Durch Anwenden der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes $(V \otimes_K (\boxplus_{i\in I} W_i), \kappa)$ auf φ erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\Phi \colon V \otimes \left(\boxplus_{i\in I} W_i \right) \to \boxplus_{i\in I} (V \otimes_K W_i)$$

mit $\Phi \circ \kappa = \varphi$, also mit

$$v \otimes \left(\sum_{i\in I}{}' w_i X_i \right) \longmapsto \sum_{i\in I}{}' (v \otimes w_i) X_i$$

für alle $v \in V$ und $\sum'_{i\in I} w_i X_i \in \boxplus_{i\in I} W_i$.

Sei $B = \{b_j \mid j \in J\}$ eine Basis von V und für jedes $i \in I$ sei $B'_i = \{b'_{ik}\}_{k\in K_i}$ eine Basis von W_i. Dann ist $\{b'_{ik} X_i \mid i \in I,\ k \in K_i\}$ eine Basis von $\boxplus_{i\in I} W_i$, und somit ist

$$\left\{\, b_j \otimes (b'_{ik} X_i) \;\middle|\; j \in J,\, k \in K_i,\, i \in I \,\right\}$$

eine Basis von $V \otimes (\boxplus_{i\in I} W_i)$ und

$$\left\{\, (b_j \otimes b'_{ik}) X_i \;\middle|\; j \in J,\, k \in K_i,\, i \in I \,\right\}$$

eine Basis von $\boxplus_{i\in I}(V \otimes W_i)$. Wegen

$$\Phi(b_j \otimes (b'_{ik} X_i)) = (b_j \otimes b'_{ik}) X_i$$

für alle i,j,k bildet Φ die erste Basis bijektiv auf die zweite ab und ist somit ein Isomorphismus.

5. Sei $f\colon V \to V'$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen, und sei L ein Oberkörper von K. Zeige:

   (a) Die Abbildung $f_L := f \otimes \mathrm{id}_L\colon V_L \to V'_L$ ist L-linear.

   (b) $\mathrm{Kern}(f_L) = \mathrm{Kern}(f) \otimes_K L$.

   (c) $\mathrm{Bild}(f_L) = \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L$.

   (d) $\mathrm{Rang}_L(f_L) = \mathrm{Rang}_K(f)$.

   Lösung:

   (a) Nach Konstruktion ist die Abbildung $f \otimes \mathrm{id}_L$ K-linear, also insbesondere additiv. Ausserdem gilt für alle $v \in V$ und $x, y \in L$

$$\begin{aligned}(f \otimes \mathrm{id}_L)(x \cdot (v \otimes y)) &= (f \otimes \mathrm{id}_L)(v \otimes xy) \;=\; f(v) \otimes xy \\ &= x \cdot (f(v) \otimes y) \;=\; x \cdot (f \otimes \mathrm{id}_L)(v \otimes y).\end{aligned}$$

   Da jedes Element $\tilde{v} \in V \otimes_K L$ eine Summe von Elementen der Form $v \otimes y$ ist, folgt

$$(f \otimes \mathrm{id}_L)(x \cdot \tilde{v}) = x \cdot (f \otimes \mathrm{id}_L)(\tilde{v})$$

   für alle $x \in L$. Insgesamt ist $f \otimes \mathrm{id}_L$ also L-linear.

   (b-c) Wähle eine Basis B von $\mathrm{Kern}(f)$, ein Komplement $U \subset V$ von $\mathrm{Kern}(f)$, sowie eine Basis B' von U. Dann induziert f eine bijektive Abbildung von B' auf eine Basis $B'' = f(B')$ von $\mathrm{Bild}(f)$. Nach der Vorlesung sind dann

$$\begin{array}{rll} \tilde{B} &:= \{b \otimes 1 \mid b \in B\} & \text{eine Basis von } \mathrm{Kern}(f) \otimes_K L, \\ \tilde{B}' &:= \{b' \otimes 1 \mid b' \in B'\} & \text{eine Basis von } U \otimes_K L, \\ \tilde{B} \cup \tilde{B}' &= \{b \otimes 1 \mid b \in B \cup B'\} & \text{eine Basis von } V \otimes_K L, \\ \tilde{B}'' &:= \{b'' \otimes 1 \mid b'' \in B''\} & \text{eine Basis von } \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L. \end{array}$$

   Insbesondere ist somit

$$V \otimes_K L = (\mathrm{Kern}(f) \otimes_K L) \oplus (U \otimes_K L).$$

   Für jedes $b \in B$ gilt $(f \otimes \mathrm{id}_L)(b \otimes 1) = f(b) \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$; also ist $B \subset \mathrm{Kern}(f \otimes \mathrm{id}_L)$ und somit $\mathrm{Kern}(f) \otimes_K L \subset \mathrm{Kern}(f \otimes \mathrm{id}_L)$. Andererseits bildet $f \otimes \mathrm{id}_L$ die Menge $\tilde{B}'$ bijektiv auf $\tilde{B}''$ ab und induziert daher einen Isomorphismus $U \otimes_K L \xrightarrow{\sim} \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L$. Zusammen impliziert dies also $\mathrm{Bild}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L$ und $\mathrm{Kern}(f \otimes \mathrm{id}_L) = \mathrm{Kern}(f) \otimes_K L$, wie gewünscht.

   (d) Aus der Definition des Rangs, der Aussage (c), und der Dimensionsinvarianz der Basiserweiterung folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{Rang}_L(f \otimes \mathrm{id}_L) &= \dim_L(\mathrm{Bild}(f \otimes \mathrm{id}_L)) \\ &= \dim_L(\mathrm{Bild}(f) \otimes_K L) \\ &= \dim_K(\mathrm{Bild}(f)) \;=\; \mathrm{Rang}_K(f).\end{aligned}$$

6. Sei V ein reeller Vektorraum und sei I ein Endomorphismus mit $I^2 = -\mathrm{id}_V$. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren seiner Komplexifizierung

$$I_{\mathbb{C}} := I \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}).$$

Lösung: Im Fall $V = 0$ gibt es keine Eigenwerte oder Eigenwerte. Andernfalls folgt aus $I^2 + \mathrm{id}_V = 0_V$ auch

$$(I_{\mathbb{C}} \mp i \cdot \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}}) \cdot (I_{\mathbb{C}} \pm i \cdot \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}}) \;=\; I_{\mathbb{C}}^2 + \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}} \;=\; 0_{V_{\mathbb{C}}}.$$

Also ist

$$\mathrm{Bild}(I_{\mathbb{C}} \pm i \cdot \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}}) \;\subset\; \mathrm{Kern}(I_{\mathbb{C}} \mp i \cdot \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}}) \;=\; \mathrm{Eig}_{\pm i}(I_{\mathbb{C}}).$$

Andererseits impliziert $(I_{\mathbb{C}} + i \cdot \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}}) \;+\; (I_{\mathbb{C}} - i \cdot \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}}) \;=\; 2\,\mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}}$ die Gleichung

$$V \;=\; \mathrm{Bild}(I_{\mathbb{C}} + i \cdot \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}}) + \mathrm{Bild}(I_{\mathbb{C}} - i \cdot \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}}).$$

Zusammen folgt daraus $V = \mathrm{Eig}_i(I_{\mathbb{C}}) \oplus \mathrm{Eig}_{-i}(I_{\mathbb{C}})$ und

$$\mathrm{Eig}_{\pm i}(I_{\mathbb{C}}) \;=\; \mathrm{Bild}(I_{\mathbb{C}} \pm i \cdot \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}}).$$

Schliesslich gilt für jeden Vektor $v \in V \setminus \{0\}$

$$(I_{\mathbb{C}} \pm i \cdot \mathrm{id}_{V_{\mathbb{C}}})(v \otimes 1) \;=\; (I \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \pm \mathrm{id}_V \otimes i\, \mathrm{id}_{\mathbb{C}})(v) \;=\; I(v) \otimes 1 \pm v \otimes i \;\neq\; 0,$$

da 1 und i als komplexe Zahlen $\mathbb{R}$-linear unabhängig sind. Folglich sind beide Eigenräume ungleich Null, und die Eigenwerte sind i und $-i$.

*7. Zeige: Zwei reelle $n \times n$-Matrizen A und A' sind ähnlich über $\mathbb{R}$ genau dann, wenn sie ähnlich über $\mathbb{C}$ sind.

Lösung: Sind A und A' ähnlich über $\mathbb{R}$, so existiert eine invertierbare reelle und somit auch komplexe Matrix U mit $UAU^{-1} = UA'U^{-1}$; also sind A und A' auch ähnlich über $\mathbb{C}$.

Sei umgekehrt angenommen, dass A und A' ähnlich über $\mathbb{C}$ sind. Dann existiert eine invertierbare komplexe $n \times n$-Matrix U mit $A = UA'U^{-1}$. Schreiben wir $U = K + iL$ für reelle $n \times n$-Matrizen K, L, so folgt

$$A \cdot (K + iL) = A \cdot U = U \cdot A' = (K + iL) \cdot A'.$$

Nehmen wir von dieser Gleichung den Real- und Imaginärteil, so finden wir $AK = KA'$ und $AL = LA'$. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt daher auch

$$A \cdot (K + xL) = (K + xL) \cdot A'.$$

Nun ist $p(X) := \det(K + XL)$ ein reelles Polynom in der Variablen X mit $p(i) = \det(K + iL) = \det(U) \neq 0$, weil U invertierbar ist. Also ist p nicht schon identisch

Null und hat daher höchstens endlich viele Nullstellen in $\mathbb{C}$. Insbesondere existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\det(K + xL) = p(x) \neq 0$. Dann ist $V := K + xL$ eine invertierbare reelle Matrix mit $A \cdot V = V \cdot A'$, also mit $A = V \cdot A' \cdot V^{-1}$. Daher sind die Matrizen A und A' auch über $\mathbb{R}$ ähnlich.

Aliter: Für jede reelle bzw. komplexe $n \times n$-Matrix B bezeichne $L_{B,\mathbb{R}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ bzw. $L_{B,\mathbb{C}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$ die Linksmultiplikation mit B. Für eine reelle Matrix B können wir damit die Abbildungen $L_{B,\mathbb{R}}$ und $L_{B,\mathbb{C}}$ voneinander unterscheiden. Ausserdem gilt dann $L_{B,\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{id}_{\mathbb{C}} = L_{B,\mathbb{C}}$ via dem natürlichen Isomorphismus $\mathbb{R}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^n$, und mit Aufgabe 5(d) folgt

$$\mathrm{Rang}_{\mathbb{R}}(L_{B,\mathbb{R}}) = \mathrm{Rang}_{\mathbb{C}}(L_{B,\mathbb{C}}). \tag{1}$$

Seien nun A und A' ähnlich über $\mathbb{C}$. Für jeden gemeinsamen Eigenwert $\alpha \in \mathbb{C}$ und jedes $i \geqslant 0$ gilt dann

$$\mathrm{Rang}_{\mathbb{C}}(L_{(A-\alpha I_n)^i,\mathbb{C}}) = \mathrm{Rang}_{\mathbb{C}}(L_{(A'-\alpha I_n)^i,\mathbb{C}})\,. \tag{2}$$

Ist $\alpha \in \mathbb{R}$, also $p(X) := X - \alpha$ ein in $\mathbb{R}[X]$ irreduzibler Faktor des (gemeinsamen) charakteristischen Polynoms, so folgt aus (1) für jedes $i \geqslant 0$ dann

$$\mathrm{Rang}_{\mathbb{R}}(L_{p(A)^i,\mathbb{R}}) = \mathrm{Rang}_{\mathbb{R}}(L_{p(A')^i,\mathbb{R}}). \tag{3}$$

Sei nun $\alpha \notin \mathbb{R}$, also $p(X) := (X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$ ein in $\mathbb{R}[X]$ irreduzibler Faktor des (gemeinsamen) charakteristischen Polynoms.

Behauptung: Für jedes $i \geqslant 0$ gilt

$$\mathrm{Rang}_{\mathbb{C}}(L_{p(A)^i,\mathbb{C}}) = \mathrm{Rang}_{\mathbb{C}}(L_{(A-\alpha I_n)^i,\mathbb{C}}) + \mathrm{Rang}_{\mathbb{C}}(L_{(A-\bar{\alpha} I_n)^i,\mathbb{C}}) - n. \tag{4}$$

Beweis: Betrachte die Hauptraumzerlegung $\mathbb{C}^n = \bigoplus_\beta \mathrm{Hau}_{X-\beta}(L_{A,\mathbb{C}})$, wobei $\beta \in \mathbb{C}$ alle Eigenwerte von A durchläuft. Dann induziert $(A - \alpha I_n)^i$ einen invertierbaren Endomorphismus von $\mathrm{Hau}_{X-\beta}(L_{A,\mathbb{C}})$ für jedes $\beta \neq \alpha$, und $(A - \bar{\alpha} I_n)^i$ induziert einen invertierbaren Endomorphismus von $\mathrm{Hau}_{X-\beta}(L_{A,\mathbb{C}})$ für jedes $\beta \neq \bar{\alpha}$. Ausserdem ist

$$p(A)^i \;=\; (A - \alpha I_n)^i (A - \bar{\alpha} I_n)^i \;=\; (A - \bar{\alpha} I_n)^i (A - \alpha I_n)^i.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}(L_{p(A),\mathbb{C}}) \;&=\; \bigoplus_\beta \mathrm{Kern}\big(L_{p(A),\mathbb{C}} \,\big|\, \mathrm{Hau}_{X-\beta}(L_{A,\mathbb{C}})\big) \\
&= \mathrm{Kern}\big(L_{(A-\alpha I_n)^i,\mathbb{C}} \,\big|\, \mathrm{Hau}_{X-\alpha}(L_{A,\mathbb{C}})\big) \;\oplus\; \mathrm{Kern}\big(L_{(A-\bar{\alpha} I_n)^i,\mathbb{C}} \,\big|\, \mathrm{Hau}_{X-\bar{\alpha}}(L_{A,\mathbb{C}})\big) \\
&= \mathrm{Kern}(L_{(A-\alpha I_n)^i,\mathbb{C}}) \;\oplus\; \mathrm{Kern}(L_{(A-\bar{\alpha} I_n)^i,\mathbb{C}}).
\end{aligned}$$

Aus der bekannten Formel $\mathrm{Rang}_{\mathbb{C}}(B) = n - \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Kern}(L_{B,\mathbb{C}})$ für jede komplexe $n \times n$-Matrix B folgt daraus die Behauptung. **q.e.d.**

Durch Einsetzen der Gleichung (2) in die Behauptung (4) und die analoge Formel für A' anstatt A folgt nun

$$\mathrm{Rang}_{\mathbb{C}}(L_{p(A)^i,\mathbb{C}}) \;=\; \mathrm{Rang}_{\mathbb{C}}(L_{p(A')^i,\mathbb{C}})$$

Mit (1) folgt daraus dann dieselbe Aussage wie oben:

$$\mathrm{Rang}_{\mathbb{R}}(L_{p(A)^i,\mathbb{R}}) \;=\; \mathrm{Rang}_{\mathbb{R}}(L_{p(A')^i,\mathbb{R}}). \tag{3}$$

Dies gilt also für alle normierten irreduziblen Faktoren $p(X) \in \mathbb{R}[X]$ des gemeinsamen charakteristischen Polynoms und für alle $i \geqslant 0$. Somit haben A und A' dieselbe Jordansche Normalform über $\mathbb{R}$; also sind sie ähnlich.

8. Sei $\big(V, \langle\, , \rangle\big)$ ein unitärer Vektorraum. Sei $V_{\mathbb{R}} := V$ aufgefasst als *reeller* Vektorraum. Zeige:

   (a) Der Realteil $\mathrm{Re}\langle\, , \rangle$ ist ein (euklidisches) Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{R}}$.

   (b) Für jede Orthonormalbasis B von $(V, \langle\, , \rangle)$ ist
   $$\big\{v, iv \;\big|\; v \in B\big\}$$
   eine Orthonormalbasis von $(V_{\mathbb{R}}, \mathrm{Re}\langle\, , \rangle)$.

   (c) Jeder unitäre Endomorphismus von V ist ein orthogonaler Endomorphismus von $V_{\mathbb{R}}$.

Lösung:

(a) Man prüft direkt, dass $\mathrm{Re}\langle\, , \rangle$ bilinear ist; zum Beispiel gilt $\mathrm{Re}\langle \lambda v, w\rangle = \mathrm{Re}(\overline{\lambda}\langle v, w\rangle) = \lambda \mathrm{Re}\langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V_{\mathbb{R}}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $\mathrm{Re}\,\overline{z} = \mathrm{Re}\,z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ist
$$\mathrm{Re}\langle v, w\rangle = \mathrm{Re}(\overline{\langle w, v\rangle}) = \mathrm{Re}\langle w, v\rangle$$
für alle $v, w \in V_{\mathbb{R}}$, also $\mathrm{Re}\langle\, , \rangle$ symmetrisch, und wegen $\langle v, v\rangle > 0$ für alle $v \in V_{\mathbb{R}} \smallsetminus \{0\}$ ist $\mathrm{Re}\langle\, , \rangle$ zudem positiv definit, also ein euklidisches Skalarprodukt.

(b) Jeder Vektor in V ist eine komplexe Linearkombination der Basisvektoren B, also auch eine reelle Linearkombination der Vektoren $\{v, iv \,|\, v \in B\}$; Die Vektoren v, iv für alle $v \in B$ erzeugen also V.
Aus $\langle b, b'\rangle = \delta_{bb'}$ für alle $b, b' \in B$ folgt
$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\langle b, b'\rangle &= \delta_{bb'}, \\ \mathrm{Re}\langle b, ib'\rangle &= \mathrm{Re}\big(i \cdot \delta_{bb'}\big) = 0, \\ \mathrm{Re}\langle ib, ib'\rangle &= \mathrm{Re}\big(i \cdot (-i) \cdot \delta_{bb'}\big) = \delta_{bb'}. \end{aligned}$$
Also ist $\{b, ib \mid b \in B\}$ eine Orthonormalbasis von $(V_{\mathbb{R}}, \mathrm{Re}\langle\, , \rangle)$.

(c) Für jeden unitären Endomorphismus f von V gilt $\langle f(v), f(w)\rangle = \langle v, w\rangle$, also $\mathrm{Re}\langle f(v), f(w)\rangle = \mathrm{Re}\langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in V$, also f orthogonal bezüglich $\mathrm{Re}\langle\, , \rangle$.