Musterlösung Serie 26

Tensorpotenzen und Äussere Potenzen

1. Seien α, β, γ Vektoren in einem K-Vektorraum. Vereinfache die Ausdrücke

   (a) $(\alpha - \beta) \wedge (\alpha + \beta)$,

   (b) $(\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma) \wedge (\gamma - \alpha)$,

   (c) $(\beta - \alpha) \wedge (\gamma - \alpha) + (\alpha + \gamma) \wedge \gamma - \beta \wedge \gamma$.

   Lösung:

   (a) $(\alpha - \beta) \wedge (\alpha + \beta) = \alpha \wedge \alpha + \alpha \wedge \beta - \beta \wedge \alpha - \beta \wedge \beta = 2\,\alpha \wedge \beta$.

   (b) Mit $v_1 := \alpha - \beta$ und $v_2 := \beta - \gamma$ ist $\gamma - \alpha = -v_1 - v_2$. Also gilt

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma) \wedge (\gamma - \alpha) &= v_1 \wedge v_2 \wedge (-v_1 - v_2) \\ &= -v_1 \wedge v_2 \wedge v_1 - v_1 \wedge v_2 \wedge v_2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

   (c) Es gilt

$$\begin{aligned}&(\beta - \alpha) \wedge (\gamma - \alpha) + (\alpha + \gamma) \wedge \gamma - \beta \wedge \gamma \\ &\qquad = (\beta \wedge \gamma - \beta \wedge \alpha - \alpha \wedge \gamma) + \alpha \wedge \gamma - \beta \wedge \gamma \\ &\qquad = \alpha \wedge \beta.\end{aligned}$$

2. Unter welchen Bedingungen an $v_1, \ldots, v_r \in V$ ist

   (a) $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r = 0$ in $V^{\otimes r}$?

   (b) $v_1 \cdots v_r = 0$ in $S^r V$?

   (c) $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r = 0$ in $\Lambda^r V$?

   Lösung: (a) Es ist $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r \neq 0$ genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_r \neq 0$ sind.

   Beweis. Wir verwenden Induktion über r. Im Fall $r = 0$ gilt die Aussage, weil $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r = 1$ ist und die Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ alle ungleich Null sind, da es keine davon gibt. Im Fall $r = 1$ gilt die Aussage tautologisch. Sei also $r \geqslant 2$ und die Aussage korrekt für $r - 1$. Wegen der Assoziativität des Tensorproduktes ist dann

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \;=\; (v_1 \otimes \ldots \otimes v_{r-1}) \otimes v_r.$$

Nach Teil (a) einer Proposition aus §11.3 der Zusammenfassung ist dies genau dann ungleich Null, wenn $v_1 \otimes \ldots \otimes v_{r-1}$ und v_r beide ungleich Null sind. Nach der Induktionsvoraussetzung ist dies äquivalent zu $v_1, \ldots, v_r \neq 0$. $\square$

(b) Es ist $v_1 \cdots v_r \neq 0$ genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_r \neq 0$ sind.

Beweis. Ist ein $v_i = 0$, dann folgt aus der Multilinearität der Produktabbildung $V^r \to S^r V$, dass $v_1 \cdots v_r = 0$ ist. Seien also $v_1, \ldots, v_r \neq 0$. Wir verwenden Induktion über r. Im Fall $r \leqslant 1$ gilt die Aussage aus denselben Gründen wie in (a). Sei also $r \geqslant 2$ und die Aussage korrekt für $r - 1$.

Wähle eine Basis B von V mit $v_1 \in B$ und eine Totalordnung $\preccurlyeq$ auf B mit grösstem Element v_r. Dann ist die Menge

$$\left\{ b_1 \cdots b_{r-1} \;\middle|\; b_1, \ldots, b_{r-1} \in B \text{ mit } b_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq b_{r-1} \right\}$$

eine Basis von $S^{r-1}V$. Also existieren Koeffizienten $a_{b_1,\ldots,b_{r-1}} \in K$ mit

$$v_1 \cdots v_{r-1} \;=\; \sideset{}{'}\sum_{\substack{b_1,\ldots,b_{r-1} \in B \\ b_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq b_{r-1}}} a_{b_1,\ldots,b_{r-1}} b_1 \cdots b_{r-1}.$$

Somit ist

$$v_1 \cdots v_r \;=\; \sideset{}{'}\sum_{\substack{b_1,\ldots,b_{r-1} \in B \\ b_1 \preccurlyeq \ldots \preccurlyeq b_{r-1}}} a_{b_1,\ldots,b_{r-1}} b_1 \cdots b_{r-1} v_r.$$

Nach der Konstruktion von B bilden die Elemente $b_1 \cdots b_{r-1} v_r$ in dieser Summe einen Teil einer Basis von $S^r V$. Wegen der Induktionsvoraussetzung ist aber $v_2 \cdots v_r \neq 0$; also verschwinden nicht alle der Koeffizienten $a_{b_1,\ldots,b_{r-1}}$. Somit ist auch $v_1 \cdots v_r$ eine nicht-triviale Linearkombination von Basiselementen und daher ungleich Null. $\square$

(c) Es ist $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r \neq 0$ genau dann, wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig sind.

Beweis. Falls die Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ linear unabhängig sind, können wir diese zu einer Basis $\{v_i \mid i \in I\}$ von V erweitern und die gegebene Ordnung auf $\{1, \ldots, r\}$ zu einer Totalordnung $\prec$ auf I fortsetzen. Dann bilden die Elemente $v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_r}$ für alle $i_1, \ldots, i_r \in I$ mit $i_1 \prec \ldots \prec i_r$ eine Basis von $\Lambda^r V$. Insbesondere ist dann $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r$ in dieser Basis und folglich ungleich Null, wie gewünscht.

Sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig, so existiert ein i mit $v_i = \sum_{j \neq i} a_j v_j$ für Koeffizienten $a_j \in K$. Es folgt

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \;=\; \sum_{j \neq i} a_j \cdot v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v_j \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_k$$

Für jedes $j \neq i$ enthält der Ausdruck $v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v_j \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_k$ den Vektor v_j zweimal und ist daher gleich 0. Also ist $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k = 0$. $\square$

3. Unter welchen Bedingungen an $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ existieren $w_1, w_2 \in V$ mit

   (a) $v_1 \otimes v_2 + v_3 \otimes v_4 = w_1 \otimes w_2$ in $V^{\otimes 2}$?

   (b) $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4 = w_1 \wedge w_2$ in $\Lambda^2 V$?

   Lösung:

   (a) *Behauptung.* Es existieren Vektoren $w_1, w_2 \in V$ mit $v_1 \otimes v_2 + v_3 \otimes v_4 = w_1 \otimes w_2$ genau dann, wenn v_1, v_3 linear abhängig oder v_2, v_4 linear abhängig sind.

   Beweis. Sind v_1, v_3 und v_2, v_4 jeweils linear unabhängig, folgt aus Proposition (b) §11.3 der Zusammenfassung, dass $v_1 \otimes v_2 + v_3 \otimes v_4$ nicht rein, also nicht von der Form $w_1 \otimes w_2$ für Vektoren $w_1, w_2 \in V$ ist.

   Falls dagegen v_1, v_3 linear abhängig sind, existieren $w_1 \in V$ und $\lambda, \mu \in K$ mit $v_1 = \lambda w_1$ und $v_3 = \mu w_1$. Also gilt

$$\begin{aligned} v_1 \otimes v_2 + v_3 \otimes v_4 &= \lambda w_1 \otimes v_2 + \mu w_1 \otimes v_4 \\ &= w_1 \otimes \lambda v_2 + w_1 \otimes \mu v_4 \\ &= w_1 \otimes (\lambda v_2 + \mu v_4), \end{aligned}$$

   und die Behauptung ist richtig mit $w_2 := \lambda v_2 + \mu v_4$. Der Fall, in dem v_2, v_4 linear abhängig sind, folgt analog. $\square$

   (b) *Behauptung.* Es existieren Vektoren $w_1, w_2 \in V$ mit $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4 = w_1 \wedge w_2$ genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_4$ linear abhängig sind.

   Beweis. Falls $v_1, \ldots, v_4$ linear abhängig sind, lässt sich einer der Vektoren v_i als Linearkombination der anderen darstellen. Nach etwaigem Vertauschen können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v_4 = av_1 + bv_2 + cv_3$ mit Koeffizienten $a, b, c \in K$ annehmen. Dann ist

$$\begin{aligned} v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4 &= v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge (av_1 + bv_2) \\ &= v_1 \wedge v_2 - a \cdot v_1 \wedge v_3 + b \cdot v_3 \wedge v_2 \\ &= v_1 \wedge (v_2 - av_3) + b \cdot v_3 \wedge v_2 \\ &= (v_1 + bv_3) \wedge (v_2 - av_3). \end{aligned}$$

   Also gilt die Behauptung mit $w_1 := v_1 + bv_3$ und $w_2 := v_2 - av_3$.

   Falls dagegen $v_1, \ldots, v_4$ linear unabhängig sind, erweitere diese zu einer Basis $\{v_i \mid i \in I\}$ von V und setze die gegebene Ordnung auf $\{1, 2, 3, 4\}$ fort zu einer Totalordnung $<$ auf I. Dann bilden die Elemente $v_i \wedge v_j$ für alle $i, j \in I$ mit $i < j$ eine Basis von $\Lambda^2 V$. Nehmen wir nun an, es existieren Vektoren $w_1 = \sum'_{i \in I} a_i v_i$ und $w_2 = \sum'_{i \in I} b_i v_i$ mit $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4 = w_1 \wedge w_2$. Dann berechnen wir

$$w_1 \wedge w_2 = {\sum_{i,j \in I}}' a_i b_j \cdot v_i \wedge v_j = {\sum_{i,j \in I \text{ mit } i<j}}' (a_i b_j - a_j b_i) \cdot v_i \wedge v_j.$$

Durch Vergleichen der Koeffizienten von $v_i \wedge v_j$ für alle $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ folgt

$$\begin{array}{llll} (1) & a_1b_2 - a_2b_1 = 1, & (4) & a_2b_3 - a_3b_2 = 0, \\ (2) & a_1b_3 - a_3b_1 = 0, & (5) & a_2b_4 - a_4b_2 = 0, \\ (3) & a_1b_4 - a_4b_1 = 0, & (6) & a_3b_4 - a_4b_3 = 1. \end{array}$$

Wegen (1) können wir nach der etwaigen Substitution $(w_1, w_2) \mapsto (w_2, -w_1)$ annehmen, dass a_1 und b_2 beide nicht 0 sind. Dann ist

$$b_3 \overset{(2)}{=} \frac{b_1}{a_1}a_3 \overset{(4)}{=} \frac{b_1a_2}{a_1b_2}b_3 \overset{(1)}{=} \frac{a_1b_2 - 1}{a_1b_2}b_3 \overset{(1)}{=} b_3 - \frac{b_3}{a_1b_2},$$

also $\frac{b_3}{a_1b_2} = 0$ und somit $b_3 = 0$. Aus (4) und $b_2 \neq 0$ folgt dann auch $a_3 = 0$. Damit führt aber (6) zu einem Widerspruch. Daher ist $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ nicht rein. $\square$

Bemerkung. Falls $2 \neq 0$ in K ist, können wir auch wie folgt argumentieren. Setze $\alpha := v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$. Nach Aufgabe 6 (b) ist $\alpha = w_1 \wedge w_2$ für Vektoren $w_1, w_2 \in V$ genau dann, wenn $\alpha \wedge \alpha = 0$ ist. Eine direkte Rechnung liefert aber

$$\alpha \wedge \alpha = 2 \cdot v_1 \wedge \ldots \wedge v_4.$$

Im Fall $2 \neq 0$ ist dies nach der Lösung zu Aufgabe 2 (c) gleich Null genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_4$ linear unabhängig sind.

4. Seien $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum V. Zeige:

$$\big\langle v_1, \ldots, v_k \big\rangle = \big\{ x \in V \;\big|\; v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge x = 0 \big\}$$

Lösung: Ein Vektor $x \in V$ liegt im Erzeugnis $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ genau dann, wenn die Vektoren $x, v_1, \ldots, v_k$ linear abhängig sind, also wegen der Lösung zu Aufgabe 2 (c) genau dann, wenn $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge x = 0$ ist. Das zeigt die Aussage.

5. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung von endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Für jedes $r \geqslant 0$ betrachte die lineare Abbildung $\Lambda^r f : \Lambda^r V \to \Lambda^r W$. Zeige:

   (a) f ist injektiv genau dann, wenn $\Lambda^r f$ ungleich Null ist für $r = \dim(V)$.

   (b) f ist surjektiv genau dann, wenn $\Lambda^r f$ ungleich Null ist für $r = \dim(W)$.

Lösung: In der nachfolgenden Lösung kommen zwei verschiedene Ideen zum Tragen, die auch auf die jeweils andere Teilaufgabe angewendet werden können.

   (a) Es sei $r = \dim(V)$ und $b_1, \ldots, b_r$ eine Basis von V. Nach Abschnitt 12.6 der Zusammenfassung ist dann $\Lambda^r V$ eindimensional und erzeugt von dem Element $b_1 \wedge \ldots \wedge b_n$. Nach Definition von $\Lambda^r f$ haben wir

$$\Lambda^r f\,(b_1 \wedge \ldots \wedge b_n) = f\,(b_1) \wedge \ldots \wedge f\,(b_n)$$

Somit ist $\Lambda^r f$ ungleich Null genau dann, wenn $f(b_1) \wedge \ldots \wedge f(b_n) \neq 0$ ist. Nach der Lösung zu Aufgabe 3 (c) ist dies äquivalent dazu, dass die Vektoren $f(b_1), \ldots, f(b_n)$ linear unabhängig sind. Dies ist aber äquivalent dazu, dass f injektiv ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

(b) Es sei $r = \dim(W)$. Dann ist $\Lambda^r W$ eindimensional. Wir beweisen die beiden Richtungen der Behauptung separat.

Nehmen wir zunächst an, dass f surjektiv ist. Dann existiert eine lineare Abbildung $g : W \to V$ mit $f \circ g = \mathrm{id}_W$. Nach der Funktorialität der äusseren Potenz gilt folglich

$$\Lambda^r f \circ \Lambda^r g = \Lambda^r (f \circ g) = \Lambda^r (\mathrm{id}_W) = \mathrm{id}_{\Lambda^r W}$$

Wegen $\Lambda^r W \neq 0$ ist diese Abbildung ungleich Null und daher auch $\Lambda^r f$.

Nehmen wir umgekehrt an, dass f nicht surjektiv ist. Dann ist $W' := \mathrm{Bild}(f)$ ein Unterraum von W der Dimension $< r$. Somit ist $\Lambda^r W' = 0$. Für die Inklusionsabbildung $i : W' \hookrightarrow W$ ist daher auch die induzierte lineare Abbildung $\Lambda^r i : \Lambda^r W' \to \Lambda^r W$ gleich Null. Ausserdem ist $f = i \circ f'$ für einen Homomorphismus $f' : V \to W'$. Nach der Funktorialität des äusseren Potenz ist daher

$$\Lambda^r f = \Lambda^r (i \circ f') = \Lambda^r i \circ \Lambda^r f',$$

und aus $\Lambda^r i = 0$ folgt nun auch $\Lambda^r f = 0$, wie gewünscht.

*6. Ein Element $\alpha \in \Lambda^k V$ heisst rein, falls Vektoren $w_1, \ldots, w_k \in V$ existieren mit $\alpha = w_1 \wedge \ldots \wedge w_k$. Zeige:

(a) Für jedes $\alpha \in \Lambda^2 V$ existiert eine Basis $\{b_i\}_{i \in I}$ von V und ein $k \geqslant 0$ mit $\{1, \ldots, 2k\} \subset I$ und $\alpha = b_1 \wedge b_2 + \ldots + b_{2k-1} \wedge b_{2k}$.

(b) Ist $2 \neq 0$ in K, so ist $\alpha \in \Lambda^2 V$ genau dann rein, wenn $\alpha \wedge \alpha = 0$ ist in $\Lambda^4 V$.

Lösung:

(a) Es sei $\alpha \in \Lambda^2 V$ und $\{b_i\}_{i \in I}$ eine Basis von V. Dann ist α eine endliche Linearkombination von Vektoren der Form $b_i \wedge b_j$. Nach geeigneter Wahl der Indexmenge I können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass

$$\alpha = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij} b_i \wedge b_j \tag{1}$$

ist für ein $0 \leqslant n < \infty$ und für Koeffizienten $a_{ij} \in K$. Es genügt also zu zeigen:

Behauptung. Für jede Wahl linear unabhängiger Vektoren $b_1, \ldots, b_n \in V$ und für jedes $\alpha \in \Lambda^2 V$ der Form (1) existiert eine Basis $\big(\tilde{b}_1, \ldots, \tilde{b}_n\big)$ des Unterraums $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ und ein $0 \leqslant k \leqslant n/2$ mit

$$\alpha = \tilde{b}_1 \wedge \tilde{b}_2 + \ldots + \tilde{b}_{2k-1} \wedge \tilde{b}_{2k}$$

Beweis. Wir verwenden Induktion über n. Im Fall $n = 0$ oder $\alpha = 0$ gilt die Aussage mit $k = 0$. Sei andernfalls $n > 0$ und $\alpha \neq 0$, und die Behauptung gelte für alle $n' < n$. Nach einer etwaigen Umordnung der Vektoren $b_1, \ldots, b_n$ können wir $a_{12} \neq 0$ annehmen. Setze

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 &:= a_{12} \cdot \Bigg(b_1 - \sum_{2<j\leqslant n} \frac{a_{2j}}{a_{12}} \cdot b_j \Bigg) \qquad \text{und} \\ \tilde{b}_2 &:= b_2 + \sum_{2<j\leqslant n} \frac{a_{1j}}{a_{12}} \cdot b_j . \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{b}_1 \wedge \tilde{b}_2 &= a_{12} b_1 \wedge b_2 + \sum_{2<j\leqslant n} a_{1j} b_1 \wedge b_j - \sum_{2<j\leqslant n} a_{2j} b_j \wedge b_2 - \sum_{2<j,j'\leqslant n}^{n} \frac{a_{2j} a_{1j'}}{a_{12}} b_j \wedge b_{j'} \\ &= \sum_{2\leqslant j\leqslant n} a_{1j} b_1 \wedge b_j + \sum_{2<j\leqslant n} a_{2j} b_2 \wedge b_j - \sum_{2<j,j'\leqslant n}^{n} \frac{a_{2j} a_{1j'}}{a_{12}} \cdot b_j \wedge b_{j'} \end{aligned}$$

Folglich gibt es Koeffizienten $c_{ij} \in K$ mit

$$\alpha = \tilde{b}_1 \wedge \tilde{b}_2 + \sum_{2<i<j\leqslant n} c_{ij} \cdot b_i \wedge b_j$$

Durch Anwenden der Induktionsvoraussetzung auf die linear unabhängigen Vektoren $b_3, \ldots, b_n$ und das Element $\sum_{2<i<j\leqslant n} c_{ij} \cdot b_i \wedge b_j$ erhalten wir eine Basis $\tilde{b}_3, \ldots, \tilde{b}_n$ von $\langle b_3, \ldots, b_n \rangle$ und eine Zahl $1 \leqslant k \leqslant n/2$ mit

$$\sum_{2<i<j\leqslant n} c_{ij} \cdot b_i \wedge b_j \;=\; \tilde{b}_3 \wedge \tilde{b}_4 + \ldots + \tilde{b}_{2k-1} \wedge \tilde{b}_{2k}$$

Damit hat

$$\alpha \;=\; \tilde{b}_1 \wedge \tilde{b}_2 + \tilde{b}_3 \wedge \tilde{b}_4 + \ldots + \tilde{b}_{2k-1} \wedge \tilde{b}_{2k}$$

die gesuchte Form. Ausserdem zeigt die Konstruktion von $\tilde{b}_1$ und $\tilde{b}_2$, dass $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, b_3, \ldots, b_n)$ eine Basis von $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ ist, und somit gilt dasselbe auch für $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{b}_3, \ldots, \tilde{b}_n)$. Damit ist die Behauptung bewiesen. □

(b) Falls α rein ist, so gibt es Vektoren $w_1, w_2 \in V$ mit $\alpha = w_1 \wedge w_2$. Nach der Definition von alternierenden Abbildungen ist dann

$$\alpha \wedge \alpha = w_1 \wedge w_2 \wedge w_1 \wedge w_2 = 0.$$

Umgekehrt sei $\alpha \in \Lambda^2 V$ mit $\alpha \wedge \alpha = 0$. Nach (a) existiert eine Basis $\{b_i\}_{i\in I}$ von V mit

$$\alpha = b_1 \wedge b_2 + \ldots + b_{2k-1} \wedge b_{2k}$$

für ein $k \geqslant 0$. Dann ist

$$0 \;=\; \alpha \wedge \alpha \;=\; \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} b_{2i-1} \wedge b_{2i} \wedge b_{2j-1} \wedge b_{2j}.$$

Hier ist der Summand $b_{2i-1} \wedge b_{2i} \wedge b_{2j-1} \wedge b_{2j}$ gleich Null für $i = j$, weil er dann zweimal denselben Faktor b_{2i} enthält. Andernfalls ist er invariant unter Vertauschung von i und j, weil diese Vertauschung durch die Transpositionen $2i \leftrightarrow 2j$ und $2i-1 \leftrightarrow 2j-1$ erreicht wird, die beide ein Vorzeichenwechsel bewirken. Insgesamt folgt daraus

$$0 = 2 \cdot \sum_{0<i<j\leqslant k} b_{2i-1} \wedge b_{2i} \wedge b_{2j-1} \wedge b_{2j}.$$

Da $2 \neq 0$ ist und die Vektoren $b_{2i-1} \wedge b_{2i} \wedge b_{2j-1} \wedge b_{2j}$ für alle $i < j$ linear unabhängig sind, muss die Summe leer, also $k \leqslant 1$ sein. Im Fall $k = 0$ ist $\alpha = 0 \wedge 0$ und im Fall $k = 1$ ist $\alpha = b_1 \wedge b_2$; in beiden Fällen ist α also rein.