# Musterlösung Serie 27

## Tensoralgebra und Vektorprodukt

1. Sei $V$ ein $K$-Vektorraum von endlicher Dimension $n$.

   (a) Zeige, dass es genau eine lineare Abbildung $e : V^\vee \otimes V \to K$ gibt mit der Eigenschaft $e(\ell \otimes v) = \ell(v)$ für alle $\ell \in V^\vee$ und $v \in V$.

   (b) Betrachte den natürlichen Isomorphismus $N : V^\vee \otimes V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V,V)$ aus der Vorlesung. Zeige, dass für jede lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(V,V)$ gilt:

$$e(N^{-1}(f)) = \mathrm{Spur}(f)$$

   (c) Folgere, dass die zusammengesetzte Abbildung

$$K \xrightarrow{x \mapsto x \cdot \mathrm{id}_V} \mathrm{Hom}(V,V) \xrightarrow{N^{-1}} V^\vee \otimes V \xrightarrow{e} K$$

   die Multiplikation mit $n$ ist.

   (d) Wo genau geht das schief, wenn $V$ unendliche Dimension hat?

*Lösung*:

(a) Die Auswertungsabbildung

$$V^\vee \times V \to K, \quad (\ell, v) \mapsto \ell(v)$$

ist bilinear, da für alle $\ell, \ell' \in V^\vee$ und $v, v' \in V$ sowie $x, x' \in K$ gilt:

$$\begin{array}{rcccl} (x\ell + x'\ell')(v) & = & (x\ell)(v) + (x'\ell')(v) & = & x \cdot \ell(v) + x' \cdot \ell'(v), \\ \ell(xv + x'v') & = & \ell(xv) + \ell(x'v') & = & x \cdot \ell(v) + x' \cdot \ell(v'). \end{array}$$

Nach der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes induziert diese bilineare Abbidlung eine eindeutige lineare Abbildung $e : V^\vee \otimes V \to K$ mit der gewünschten Eigenschaft.

(b) Wir wählen eine geordnete Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ von $V$ und bezeichnen mit $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ die zugehörige Dualbasis von $V^\vee$. Für alle $1 \leqslant i, j \leqslant n$ gilt dann $\ell_j(b_i) = \delta_{ij}$. Nach der Vorlesung ist nun $\{\ell_j \otimes b_i\}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ eine Basis des Tensorprodukts $V^\vee \otimes V$, und der Isomorphismus $N$ ist bestimmt durch die Gleichung

$$N(\ell_j \otimes b_i)(v) = \ell_j(v) \cdot b_i$$

für alle $i, j$. Sei nun $f \in \mathrm{Hom}(K, K)$ mit Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B = (a_{ij})_{i,j}$ und betrachte den Tensor

$$t \;:=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \ell_j \otimes b_i \;\in\; V^\vee \otimes V.$$

Für alle $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt dann

$$N(t)(b_k) = \left( \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \ell_j \otimes b_i \right)(b_k) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \ell_j(b_k) \cdot b_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} \cdot b_i = f(b_k).$$

Somit ist $N(t) = f$. Andererseits ist

$$e(t) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot e(\ell_j \otimes b_i) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \ell_j(b_i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \;=\; \mathrm{Spur}(f)$$

nach der Definition von $\mathrm{Spur}(f)$. Insgesamt folgt somit die Behauptung.

(c) Seien $b_i$ und $\ell_i$ wie in (b). Für jedes $x \in K$ hat dann $f := x \cdot \mathrm{id}_V$ die Darstellungsmatrix $x \cdot I_n$ mit der Einheitsmatrix $I_n$ der Grösse $n \times n$. Deren Spur, das heisst, die Summe ihrer Diagonaleinträge, ist gleich $\sum_{i=1}^{n} x = nx$. Also ist

$$e(N^{-1}(x \cdot \mathrm{id}_V)) \;=\; \mathrm{Spur}(x \cdot \mathrm{id}_V) \;=\; nx.$$

(d) Für $V$ unendlich-dimensional ist $N$ injektiv, aber nicht bijektiv; insbesondere ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_V$ nicht im Bild. Auch ist die Spur eines Endomorphismus von $V$ dann nicht definiert. Somit ergeben beide Seiten der Gleichung in (b) im Allgemeinen keinen Sinn.

Das Bild von $N$ besteht aber genau aus den Endomorphismen von endlichem Rang. Für diese lässt sich durch die Formel in (b) also doch eine natürliche Spur definieren.

*2. Sei $r$ eine natürliche Zahl mit $r! \neq 0$ in $K$. Konstruiere für jeden endlich-dimensionalen $K$-Vektorraum $V$ einen natürlichen Isomorphismus

$$S^r_K(V^\vee) \cong (S^r_K V)^\vee.$$

*Lösungsskizze*: Betrachte die multilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon (V^\vee)^r \times V^r &\longrightarrow K, \\ (\ell_1, \ldots, \ell_r; v_1, \ldots, v_r) &\longmapsto \sum_{\sigma \in S_r} \ell_1(v_{\sigma 1}) \cdots \ell_r(v_{\sigma r}). \end{aligned}$$

Man zeigt direkt, dass für jedes $\tau \in S_r$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(\ell_1, \ldots, \ell_r; v_1, \ldots, v_r) &= \varphi(\ell_{\tau 1}, \ldots, \ell_{\tau r}; v_1, \ldots, v_r) \\ &= \varphi(\ell_1, \ldots, \ell_r; v_{\tau 1}, \ldots, v_{\tau r}). \end{aligned}$$

Durch Anwenden der universellen Eigenschaften von $(S^r(V^\vee), \kappa)$ und $(S^rV, \kappa')$ erhält man eine eindeutige Abbildung

$$\Phi\colon S^r(V^\vee) \times S^rV \to K$$

mit $\Phi \circ (\kappa, \kappa') = \varphi$. Weiter prüft man direkt, dass $\Phi$ bilinear ist. Wegen der Adjunktionsformel für das Tensorprodukt existiert dann eine eindeutige lineare Abbildung

$$\psi\colon S^r(V^\vee) \to \mathrm{Hom}_K(S^rV, K) = (S^rV)^\vee$$

mit $\psi(\ell)(v) = \Phi(\ell, v)$ für alle $v \in S^rV$ und $\ell \in S^r(V^\vee)$.

Um zu prüfen, ob $\psi$ ein Isomorphismus ist, betrachten wir eine geordnete Basis $(b_1, \ldots, b_n)$ von $V$ und die zugehörige Dualbasis $(b_1^\vee, \ldots, b_n^\vee)$ von $V^\vee$. Für alle $i, j$ gilt dann $b_i^\vee(b_j) = \delta_{ij}$. Ausserdem ist

$$\begin{aligned} B_r &:= \left\{ b_{i_1} \cdots b_{i_r} \;\middle|\; 1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r \leqslant n \right\} && \text{eine Basis von } S^rV \text{ und} \\ B_r^\vee &:= \left\{ b_{i_1}^\vee \cdots b_{i_r}^\vee \;\middle|\; 1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r \leqslant n \right\} && \text{eine Basis von } S^r(V^\vee). \end{aligned}$$

Für alle $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_r \leqslant n$ und $1 \leqslant j_1 \leqslant \ldots \leqslant j_r \leqslant n$ berechnen wir

$$(*) \qquad \begin{aligned} \psi(b_{i_1}^\vee \cdots b_{i_r}^\vee)(b_{j_1} \cdots b_{j_r}) &= \Phi(b_{i_1}^\vee \cdots b_{i_r}^\vee, b_{j_1} \cdots b_{j_r}) \\ &= \Phi(\kappa(b_{i_1}^\vee, \ldots, b_{i_r}^\vee), \kappa'(b_{j_1}, \ldots, b_{j_r})) \\ &= \varphi(b_{i_1}^\vee, \ldots, b_{i_r}^\vee; b_{j_1}, \ldots, b_{j_r}) \\ &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_r} b_{i_1}^\vee(b_{j_{\sigma 1}}) \cdots b_{i_r}^\vee(b_{j_{\sigma r}}) \\ &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_r} \delta_{i_1 j_{\sigma 1}} \cdots \delta_{i_r j_{\sigma r}}. \end{aligned}$$

Da das Tupel $\underline{j} := (j_1, \ldots, j_r)$ in monoton wachsender Reihenfolge angeordnet ist, ist das Tupel $\underline{j}_\sigma := (j_{\sigma 1}, \ldots, j_{\sigma r})$ genau dann wieder in monoton wachsender Reihenfolge angeordnet, wenn es gleich $\underline{j}$ ist. Da auch das Tupel $\underline{i} := (i_1, \ldots, i_r)$ in monoton wachsender Reihenfolge angeordnet ist, ist es also genau dann gleich $\underline{j}_\sigma$, wenn $\underline{i} = \underline{j} = \underline{j}_\sigma$ ist. Somit ist

$$\psi(b_{i_1}^\vee \cdots b_{i_r}^\vee)(b_{j_1} \cdots b_{j_r}) \;=\; \begin{cases} N_{\underline{j}} & \text{für } \underline{i} = \underline{j}, \\ 0 & \text{für } \underline{i} \neq \underline{j}. \end{cases}$$

wobei $N_{\underline{j}}$ die Anzahl aller Permutation $\sigma \in S_r$ mit $\underline{j} = \underline{j}_\sigma$ ist.

Sei nun $\tilde{B}_r$ die zu $B_r$ duale Basis von $(S^rV)^\vee$. Diese besteht aus Linearformen $\ell_{\underline{i}}$ für alle monoton wachsende Tupel $\underline{i}$ wie oben und ist charakterisiert durch die Gleichung

$$\ell_{\underline{i}}(b_{j_1} \cdots b_{j_r}) \;=\; \delta_{i_1 j_1} \cdots \delta_{i_r j_r}$$

für alle monoton wachsende Tupel $\underline{j}$. Die Rechnung $(*)$ bedeutet dann

$$\psi(b_{i_1}^\vee \cdots b_{i_r}^\vee)(b_{j_1} \cdots b_{j_r}) \;=\; N_{\underline{i}} \cdot \ell_{\underline{i}}(b_{j_1} \cdots b_{j_r}).$$

Da hier die $b_{j_1} \cdots b_{j_r}$ durch eine Basis von $S^r V$ laufen, bedeutet dies

$$\psi(b_{i_1}^\vee \cdots b_{i_r}^\vee) \;=\; N_{\underline{i}} \cdot \ell_{\underline{i}}$$

für alle $\underline{i}$. Wenn die Faktoren $N_{\underline{i}}$ nicht da wären, würde also die Basis $B_r^\vee$ bijektiv auf die Basis $\tilde{B}_r$ abgebildet. Da die Faktoren da sind, sehen wir, dass die Abbildung genau dann ein Isomorphismus ist, wenn diese Faktoren alle ungleich Null sind.

Wir müssen also die Zahlen $N_{\underline{j}}$ bestimmen. Dafür betrachten wir für jedes $1 \leqslant k \leqslant n$ die Menge

$$I_k \;:=\; \big\{1 \leqslant \nu \leqslant r \;\big|\; j_\nu = k\big\}.$$

Dann gilt $\underline{j} = \underline{j}_\sigma$ genau dann, wenn $\sigma$ für jedes $k$ die Menge $I_k$ nur in sich permutiert, wobei diese aber beliebig in sich permutiert werden darf. Mit $r_k := |I_k|$ ist die Anzahl der Permutationen von $I_k$ aber gleich $r_k!$. Zusammengenommen ist die Anzahl der $\sigma \in S_r$ mit $\underline{j} = \underline{j}_\sigma$ daher

$$N_{\underline{j}} \;=\; \textstyle\prod_{k=1}^n r_k!.$$

Nun ist $\{1, \ldots, r\}$ die disjunkte Vereinigung der Mengen $I_k$ für alle $k$; also ist $r = r_1 + \ldots + r_n$. Aus bekannten Eigenschaften der Binomialkoeffizienten folgt daraus, dass $\prod_{k=1}^n r_k!$ ein Teiler von $r!$ ist. Da nach Voraussetzung $r! \neq 0$ ist in $K$, ist daher auch $N_{\underline{j}} \neq 0$ in $K$. Somit ist die Abbildung ein Isomorphismus. $\square$

*Bemerkung:* Ist $r! = 0$ in $K$ und $V \neq 0$, so ist auch $N_{\underline{j}} = r! = 0$ für das Tupel $\underline{j} = (1, \ldots, 1)$. Die obige Rechnung zeigt also, dass die natürlich konstruierte lineare Abbildung in diesem Fall *kein* Isomorphismus ist. Tatsächlich gibt es dann *überhaupt keinen* natürlichen Isomorphismus $S_K^r(V^\vee) \cong (S_K^r V)^\vee$.

3. Seien $V$ ein endlich-dimensionaler $K$-Vektorraum und $v$ ein festes Element von $V$.

   (a) Man zeige, dass

   $$\iota_v \colon \operatorname{Alt}^r(V, K) \to \operatorname{Alt}^{r-1}(V, K),\ \omega \mapsto ((v_1, \ldots, v_{r-1}) \mapsto \omega(v_1, \ldots, v_{r-1}, v))$$

   eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

   (b) Es seien $\varphi_r \colon \Lambda^r(V^\vee) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Alt}^r(V, K)$ und $\varphi_{r-1} \colon \Lambda^{r-1}(V^\vee) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Alt}^{r-1}(V, K)$ die aus der Vorlesung bekannten natürlichen Isomorphismen. Man beschreibe die induzierte Abbildung

   $$\iota'_v := \varphi_{r-1}^{-1} \circ \iota_v \circ \varphi_r \colon \Lambda^r(V^\vee) \longrightarrow \Lambda^{r-1}(V^\vee).$$

   (c) Man zeige für alle $\beta \in \Lambda^r(V^\vee)$ und $\gamma \in \Lambda^s(V^\vee)$ die folgende Gleichung:

   $$\iota'_v(\beta \wedge \gamma) \;=\; (-1)^s \iota'_v(\beta) \wedge \gamma + \beta \wedge \iota'_v(\gamma)$$

*Lösung*:

(a) Betrachte $\omega \in \mathrm{Alt}^r(V,K)$. Da $\omega$ in jeder Variablen separat linear ist, gilt dies auch für $\iota_v(\omega)$; also ist $\iota_v(\omega)$ multilinear. Sodann betrachte Vektoren $v_1,\ldots,v_{r-1} \in V$, so dass $v_i = v_j$ ist für zwei Indizes $1 \leqslant i < j \leqslant r-1$. Da $\omega$ alternierend ist, gilt dann

$$\iota_v(\omega)(v_1,\ldots,v_{r-1}) \;=\; \omega(v_1,\ldots,v_{r-1},v) \;=\; 0.$$

Somit ist $\iota_v(\omega)$ alternierend. Die Abbildung $\iota_v$ ist daher wohldefiniert. Schliesslich zeigt die Rechnung

$$\begin{aligned}
\iota_v(x\omega + x'\omega')(v_1,\ldots,v_{r-1}) &= (x\omega + x'\omega')(v_1,\ldots,v_{r-1},v)\\
&= x\cdot\omega(v_1,\ldots,v_{r-1},v) + x'\cdot\omega'(v_1,\ldots,v_{r-1},v)\\
&= x\cdot i_v(\omega)(v_1,\ldots,v_{r-1}) + x'\cdot\iota_v(\omega')(v_1,\ldots,v_{r-1})\\
&= (x\cdot i_v(\omega) + x'\cdot\iota_v(\omega'))(v_1,\ldots,v_{r-1})
\end{aligned}$$

für alle $\omega,\omega' \in \mathrm{Alt}^r(V,K)$ und $x,x' \in K$, dass

$$\iota_v(x\omega + x'\omega') \;=\; x\cdot i_v(\omega) + x'\cdot\iota_v(\omega')$$

ist und die Abbildung $\iota_v$ damit linear ist.

(b) Da der Raum $\Lambda^r(V^\vee)$ von Elementen der Form $\ell_1\wedge\ldots\wedge\ell_r$ erzeugt ist für alle $\ell_1,\ldots,\ell_r \in V^\vee$, genügt es, die Abbildung auf solchen Elementen anzugeben. Nach Definition von $\varphi_r$ und $\iota_v$ gilt für alle $v_1,\ldots,v_{r-1} \in V$ mit $v_r := v$

$$\begin{aligned}
\iota_v(\varphi_r(\ell_1\wedge\ldots\wedge\ell_r))(v_1,\ldots,v_{r-1}) &= \varphi_r(\ell_1\wedge\ldots\wedge\ell_r)(v_1,\ldots,v_{r-1},v_r)\\
&= \sum_{\sigma\in S_r}\mathrm{sgn}(\sigma)\cdot\ell_1(v_{\sigma 1})\cdots\ell_r(v_{\sigma r}).
\end{aligned}$$

Für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ sei $\sigma_i \in S_r$ die Permutation mit

$$\sigma_i(j) = \begin{cases} j & \text{falls } j < i\\ r & \text{falls } j = i\\ j-1 & \text{falls } j > i\end{cases}$$

Dann können wir jede Permutation $\sigma \in S_r$ auf eindeutige Weise schreiben in der Form $\sigma = \tau\sigma_i$ für ein $i$ und ein $\tau \in S_r$ mit $\tau r = r$. Dieses $\tau$ können wir dann einfach als Element von $S_{r-1}$ ansehen. Ausserdem hat $\sigma_i$ genau $r-i$ Fehlstände und daher Signum $\mathrm{sgn}(\sigma_i) = (-1)^{r-i}$. Also ist der obige Ausdruck gleich

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{\tau\in S_{r-1}}\mathrm{sgn}(\tau\sigma_i)\cdot\ell_1(v_{\tau\sigma_i 1})\cdots\ell_r(v_{\tau\sigma_i r}) \;=$$

$$= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \cdot \sum_{\tau \in S_{r-1}} \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \ell_1(v_{\tau\sigma_i 1}) \cdots \ell_i(v_r) \cdots \ell_r(v_{\tau\sigma_i r})$$
$$= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \cdot \ell_i(v_r) \cdot \sum_{\tau \in S_{r-1}} \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \ell_1(v_{\tau 1}) \cdots \ell_{i-1}(v_{\tau(i-1)}) \cdot \ell_{i+1}(v_{\tau i}) \cdots \ell_r(v_{\tau(r-1)})$$

Dies ist gleich $\varphi_{r-1}(\alpha)(v_1, \ldots, v_{r-1})$ für das Element

$$\alpha \ := \ \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \cdot \ell_i(v_r) \cdot \ell_1 \wedge \ldots \wedge \ell_{i-1} \wedge \ell_{i+1} \wedge \ldots \wedge \ell_r \ \in \ \Lambda^{r-1}(V^\vee).$$

Wegen $v_r = v$ ist damit gezeigt:

$$\iota'_v(\ell_1 \wedge \ldots \wedge \ell_r) \ = \ \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r-i} \cdot \ell_i(v) \cdot \ell_1 \wedge \ldots \wedge \ell_{i-1} \wedge \ell_{i+1} \wedge \ldots \wedge \ell_r.$$

(c) Da beide Seiten der Gleichung bilinear in $(\beta, \gamma)$ sind, genügt es, die Gleichung für Erzeugende zu beweisen. Betrachte also Elemente $\beta = \ell_1 \wedge \ldots \wedge \ell_r \in \Lambda^r V^\vee$ und $\gamma = \ell_{r+1} \wedge \ldots \wedge \ell_{r+s} \in \Lambda^s V^\vee$. Nach(b) gilt dann:

$$\begin{aligned}
\iota'_v(\beta \wedge \gamma) \ &= \ \sum_{i=1}^{r+s} (-1)^{r+s-i} \cdot \ell_i(v) \cdot \ell_1 \wedge \ldots \wedge \ell_{i-1} \wedge \ell_{i+1} \wedge \ldots \wedge \ell_{r+s} \\
&= \ \sum_{i=1}^{r} (-1)^{r+s-i} \cdot \ell_i(v) \cdot \ell_1 \wedge \ldots \wedge \ell_{i-1} \wedge \ell_{i+1} \wedge \ldots \wedge \ell_r \wedge \gamma \\
&\quad + \sum_{j=1}^{s} (-1)^{r+s-(r+j)} \cdot \ell_{r+j}(v) \cdot \beta \wedge \ell_{r+1} \wedge \cdots \wedge \ell_{r+j-1} \wedge \ell_{r+j+1} \wedge \cdots \wedge \ell_{r+s} \\
&= \ (-1)^s \cdot \iota'_v(\beta) \wedge \gamma + \beta \wedge \iota'_v(\gamma).
\end{aligned}$$

4. Für alle $u, u', v, v', w \in \mathbb{R}^3$ zeige die folgenden Identitäten:

   (a) $u \times (v \times w) = \langle u, w\rangle \cdot v - \langle u, v\rangle \cdot w$ \quad (*Grassmann-Identität*)

   (b) $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$ \quad (*Jacobi-Identität*)

   (c) $(u \times v) \times (u' \times v') = \det(u, v, v') \cdot u' - \det(u, v, u') \cdot v'$

   (d) $\langle u \times v, u' \times v'\rangle = \langle u, u'\rangle \cdot \langle v, v'\rangle - \langle v, u'\rangle \cdot \langle u, v'\rangle$

   (e) Seien $u$ und $v$ linear unabhängig und $\vartheta \in [0, \pi]$ der durch die Gleichung $\langle u, v\rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\vartheta$ bestimmte Winkel. Dann gilt $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin\vartheta|$.

*Lösung*: Zur Erinnerung: Die definierende Eigenschaft des Vektorprodukts lautet

$$(*) \qquad \langle u \times v, w\rangle \ = \ \det(u, v, w) \ = \ \langle u, v \times w\rangle$$

für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

(a) Dies zeigt man am einfachsten durch direktes Ausrechnen in der Standardbasis.

(b) Mit (a) folgt

$$\begin{aligned}
& u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) \\
= \quad & \langle u, w\rangle \cdot v - \langle u, v\rangle \cdot w \\
& + \langle v, u\rangle \cdot w - \langle v, w\rangle \cdot u \\
& + \langle w, v\rangle \cdot u - \langle w, u\rangle \cdot v \\
= \; & 0\,.
\end{aligned}$$

(c) Mit (a) und $(*)$ folgt

$$\begin{aligned}
(u \times v) \times (u' \times v') &= \langle u \times v, v'\rangle \cdot u' - \langle u \times v, u'\rangle \cdot v' \\
&= \det(u, v, v') \cdot u' - \det(u, v, u') \cdot v'.
\end{aligned}$$

(d) Es gilt

$$\begin{aligned}
\langle u \times v, u' \times v'\rangle &\overset{(*)}{=} \det(u, v, u' \times v') \\
&\overset{(*)}{=} \langle u, v \times (u' \times v')\rangle \\
&\overset{\text{(a)}}{=} \big\langle u, \langle v, v'\rangle \cdot u' - \langle v, u'\rangle \cdot v'\big\rangle \\
&= \langle u, u'\rangle \cdot \langle v, v'\rangle - \langle u, v'\rangle \cdot \langle v, u'\rangle.
\end{aligned}$$

(e) Nach (d) im Fall $(u, v) = (u', v')$ gilt

$$\begin{aligned}
\|u \times v\|^2 &= \langle u \times v, u \times v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle \cdot \langle v, v\rangle - \langle u, v\rangle \cdot \langle v, u\rangle \\
&= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 - \big(\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\vartheta\big)^2 \\
&= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cdot (1 - \cos^2\vartheta) \\
&= \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \cdot \sin^2\vartheta.
\end{aligned}$$

Durch Ziehen der Quadratwurzel folgt (e).