D-MATH
Prof. Richard Pink

Lineare Algebra II

FS 2022

Serie 15

Minimalpolynom, Cayley-Hamilton

1. Für $n \geqslant 1$ und einen beliebigen Parameter $\lambda \in K$ betrachte die $n \times n$-Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   Bestimme A^k für alle $k \geqslant 0$.

2. Berechne die Minimalpolynome der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Sei $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Finde ein Polynom $p(X)$ mit $p(A) = A^{-1}$.

4. Sei A eine beliebige $n \times n$-Matrix vom Rang r. Zeige, dass der Grad des Minimalpolynoms von A kleiner oder gleich $r + 1$ ist.

5. Sei A eine $n \times n$-Matrix. Beweise, dass der Unterraum $\langle I_n, A, A^2, \ldots \rangle$ von $\mathrm{Mat}_{n\times n}(K)$ Dimension $\leqslant n$ hat.

*6. Beweise oder widerlege: Es existiert eine reelle $n \times n$-Matrix A mit

$$A^2 + 2A + 5I_n = 0$$

   genau dann, wenn n gerade ist.

*7. Zeige den Satz von Cayley-Hamilton für alle $n \times n$-Dreiecksmatrizen durch Induktion über n.