D-MATH
Prof. Richard Pink

Lineare Algebra II

FS 2022

# Serie 16

## Minimalpolynom, Hauptraumzerlegung, Jordansche Normalform

1. Finde für jedes $k = 1, \ldots, 5$ eine komplexe $5 \times 5$-Matrix mit Minimalpolynom $(X-1)^k$.

2. Beweise oder widerlege:

   (a) Je zwei $n \times n$-Matrizen über $K$ mit demselben Minimalpolynom sind ähnlich.

   (b) Je zwei $n \times n$-Matrizen über $K$ mit demselben Minimalpolynom und demselben charakteristischen Polynom sind ähnlich.

   (c) Je zwei $n \times n$-Matrizen über $K$ mit demselben charakteristischen Polynom, welches keine mehrfachen irreduziblen Faktoren besitzt, sind ähnlich.

3. Betrachte einen endlich-dimensionalen $K$-Vektorraum der Form $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$. Für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ sei $f_i$ ein Endomorphismus von $V_i$, und sei $f$ der von diesen induzierte Endomorphismus von $V$. Zeige, dass das Minimalpolynom von $f$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Minimalpolynome der $f_i$ ist.

4. Sei $f$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$ mit dem Minimalpolynom $\varphi$. Sei $\psi \in K[X]$ ein beliebiges Polynom. Zeige, dass $\psi(f)$ genau dann ein Automorphismus ist, wenn $\psi$ und $\varphi$ teilerfremd ist.

*5. Sei $f$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) Das Minimalpolynom von $f$ ist gleich dem charakteristischen Polynom von $f$.

   (b) Es existiert eine geordnete Basis $B$ von $V$, so dass die Darstellungsmatrix ${}_B[f]_B$ die Begleitmatrix eines Polynoms ist.

6. Bestimme die Haupträume der folgenden reellen Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D := \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 2 \\ -7 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Bestimme die Jordansche Normalform der folgenden Matrix über $\mathbb{R}$ und über $\mathbb{F}_3$:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$