Serie 17

Jordansche Normalform & Normen

1. Bestimme die Jordansche Normalform und eine zugehörige Basiswechselmatrix der reellen Matrix
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Bestimme die Jordannormalform über $\mathbb{Q}$ der Matrix
$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Sei B eine komplexe 5×5-Matrix mit dem Minimalpolynom $(X-3)(X+5)^2$ und dem charakteristischem Polynom $(X-3)^2(X+5)^3$. Bestimme die möglichen Jordanschen Normalformen von B.

**4. Die Jordan-Normalform wird oft mit der Idee motiviert, dass die Matrix möglichst viele Nullen enthalten soll. Wird die Anzahl Nullen aber wirklich von der Jordan-Normalform maximiert? Umgekehrt gefragt: Gibt es eine quadratische Matrix A über einem Körper, die mehr Nullen enthält als ihre Jordannormalform J?

5. (a) Bestimme die Lösung des Systems von Differentialgleichungen
$$\begin{aligned} x'(t) &= -x(t) + 9y(t) + 9z(t) \\ y'(t) &= 3x(t) - 6y(t) - 8z(t) \\ z'(t) &= -4x(t) + 11y(t) + 13z(t) \end{aligned}$$
zu der Anfangsbedingung $x(0) = y(0) = z(0) = 1$.
Hinweis: Verwende die Jordansche Normalform.

   (b) Bestimme die allgemeine reelle Lösung der Differentialgleichung
$$f^{(3)}(t) - f^{(2)}(t) + f'(t) - f(t) = 0.$$
Hinweis: Schreibe die Gleichung als System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung, und verwende die Jordansche Normalform.

*6. Sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix. Zeige

$$\det \exp(A) = \exp \operatorname{Spur}(A)\,.$$

7. Konstruiere eine Norm $\|\cdot\|$ auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$, für welche die Einheitskugel

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leqslant 1\}$$

ein regelmässiges Sechseck ist.

*8. *(Operatornorm)* Für je zwei normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume $(V, \|\ \|)$ und $(W, \|\ \|')$ und jeden Homomorphismus $f\colon V \to W$ setze

$$\|f\| \ := \ \sup\left(\{0\} \cup \left\{ \frac{\|f(v)\|'}{\|v\|} \;\middle|\; 0 \neq v \in V \right\}\right).$$

Mit anderen Worten ist dies das kleinste Element $\|f\| \in \mathbb{R}^{\geqslant 0} \cup \{\infty\}$, so dass

$$\|f(v)\| \leqslant \|v\| \cdot \|f\|$$

für alle $v \in V$. Zeige, dass dadurch genau dann eine Norm auf $\operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ definiert ist, wenn V endlich-dimensional oder $W = 0$ ist.