D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2022
Prof. Richard Pink

Serie 18

Bilinearformen und Skalarprodukte

*1. Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V. Zeige, dass die Norm genau dann von einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf V induziert wird, wenn sie für alle $x, y \in V$ die *Parallelogrammidentität*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

erfüllt.

2. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist für $x = \binom{x_1}{x_2}$ und $y = \binom{y_1}{y_2}$ durch

$$\langle x, y\rangle := x_1y_1 + ax_1y_2 + ax_2y_1 + 7x_2y_2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert?

3. Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant n$.

   (a) Zeige, dass durch
   $$\langle p, q\rangle := \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t}\,dt$$
   ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

   (b) Bestimme die Matrix des Skalarprodukts bezüglich der Basis $1, x, \ldots, x^n$.

4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeige:

   (a) Die Matrix A^TA ist symmetrisch.

   (b) Die Matrix A^TA ist positiv definit genau dann, wenn A invertierbar ist.

   (c) Es gilt $\mathrm{Rang}(A^TA) = \mathrm{Rang}(A)$.

5. Zeige, dass durch $\langle A, B\rangle := \mathrm{Spur}(A^TB)$ ein Skalarprodukt auf $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ definiert ist, und finde eine Orthonormalbasis dazu.

**6. Zeige, dass es einen euklidischen Vektorraum gibt, der keine Orthonormalbasis besitzt.

Hinweis: Untersuche einen Hilbertraum, und beachte, dass wir hier nicht von einer Hilbertraumbasis sprechen, sondern von einer Basis im Sinn der linearen Algebra.

7. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Eine Bilinearform β auf V heisst ...

- *symmetrisch* wenn gilt $\forall\, v, w \in V \colon \beta(v, w) = \beta(w, v)$,
- *antisymmetrisch* wenn gilt $\forall\, v, w \in V \colon \beta(v, w) = -\beta(w, v)$,
- *alternierend* wenn gilt $\forall\, v \in V \colon \beta(v, v) = 0$.

Zeige:

(a) Jede alternierende Bilinearform ist antisymmetrisch.

(b) Ist $2 \neq 0$ in K, so ist jede antisymmetrische Bilinearform alternierend.

(c) Ist $2 \neq 0$ in K, so ist jede Bilinearform auf eindeutige Weise die Summe einer symmetrischen und einer alternierenden Bilinearform.

(d) Gib ein Beispiel einer antisymmetrischen, nicht alternierenden Bilinearform.

*8. Sei β eine alternierende Bilinearform auf einem endlich-dimensionalen K-Vektorraum V. Wir nehmen an, dass β *nicht-ausgeartet* ist, das heisst, dass gilt:

$$\forall\, v \in V \smallsetminus \{0\}\ \exists\, v' \in V \colon \beta(v, v') \neq 0.$$

Wie im euklidischen Fall ist das *orthogonale Komplement* eines Unterraums $U \subset V$ definiert als

$$U^\perp \ := \ \big\{ v \in V \ \big|\ \forall u \in U \colon \beta(v, u) = 0 \big\}.$$

Ein Unterraum U mit $U \subset U^\perp$ heisst *isotrop (bezüglich β)*. Zeige:

(a) Für jeden Unterraum U ist $U^\perp$ ein Unterraum.

(b) Für jeden Unterraum U gilt $\dim_K V = \dim_K U + \dim_K U^\perp$.

(c) Für jeden maximalen isotropen Unterraum U gilt $U = U^\perp$.

(d) Jeder isotrope Unterraum ist in einem maximalen isotropen Unterraum enthalten.

(e) Es existiert eine geordnete Basis B von V, bezüglich welcher β die Darstellungsmatrix

$$M_B(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt. Insbesondere ist $\dim(V) = 2n$ gerade.