Lineare Algebra II

Serie 19

Orthogonalität

1. Betrachte den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}[X]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(t)q(t)e^{-t}dt.$$

   (a) Zeige, dass es eine eindeutige Orthonormalbasis $p_0, p_1, p_2, \ldots$ von $\mathbb{R}[X]$ gibt, so dass $\deg(p_n) = n$ ist und der Leitkoeffizient jedes p_n positiv ist.

   (b) Gib p_0, p_1, p_2 explizit an.

2. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $v_1 = (1, 1, 1)^T$ und $v_2 = (0, 2, 1)^T$.

   (a) Bestimme je eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.

   (b) Berechne die Darstellungsmatrizen der orthogonalen Projektionen $\mathbb{R}^3 \to U$ und $\mathbb{R}^3 \to U^\perp$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der jeweiligen Basis aus (a).

3. Berechne eine Zerlegung $A = QR$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   in eine orthogonale Matrix Q und eine rechte obere Dreiecksmatrix R. Verwende diese Zerlegung, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $b = (0, 3, -3)^T$ zu lösen.

4. Sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$. Bestimme das n-dimensionale Volumen des von den Vektoren

$$e_1 + e_2,\ e_2 + e_3,\ \ldots\ ,\ e_{n-1} + e_n,\ e_n + e_1$$

   aufgespannten Parallelotops

   (a) ... im Fall $n = 3$.

   *(b) ... für beliebiges $n \geqslant 3$.

5. Für einen endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ betrachte den Isomorphismus

$$\delta\colon V \to V^\vee := \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V, \mathbb{R}),\ v \mapsto \delta(v) := \langle v, \cdot \rangle.$$

   (a) Zeige, dass genau ein Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle^\vee$ auf $V^\vee$ existiert, so dass δ eine Isometrie ist.

   (b) Sei B eine geordnete Basis von V, und sei $B^\vee$ die zugehörige duale Basis von $V^\vee$. Gib die Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle^\vee$ bezüglich $B^\vee$ in Termen der Darstellungsmatrix von $\langle\ ,\ \rangle$ bezüglich B an.

6. Seien f und g lineare Abbildungen von euklidischen Vektorräumen, deren Adjungierte f^* und g^* existieren. Zeige:

   (a) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

   (b) $(f + g)^* = f^* + g^*$

   (c) $(cf)^* = cf^*$ für alle $c \in \mathbb{R}$

   (d) Wenn f invertierbar ist und $(f^{-1})^*$ existiert, so gilt $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

   *(e) Wenn f invertierbar ist, existiert dann $(f^{-1})^*$ immer?