Lineare Algebra II

FS 2022

Serie 20

Adjungierte Abbildungen, Spektralsatz, Bilinearformen und quadratische Formen

1. Sei f ein selbstadjungierter Endomorphismus eines euklidischen Vektorraums V. Zeige, dass die Eigenräume von f zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal zueinander sind.

2. Seien f, g_1, g_2 Endomorphismen eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraumes mit
$$f^* \circ f \circ g_1 = f^* \circ f \circ g_2\,.$$
Zeige, dass $f \circ g_1 = f \circ g_2$ ist.

*3. Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus zwischen euklidischen Vektorräumen. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Adjungierte $f^*\colon W \to V$ existiert, wenn $\dim(V) < \infty$ ist. Gilt dies auch, wenn $\dim(W) < \infty$ ist?

4. Sei V der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren periodischen Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode 2π, versehen mit dem Skalarprodukt
$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx\,.$$
Betrachte die lineare Abbildung
$$D\colon V \to V,\ f \mapsto \frac{df}{dx}.$$
   (a) Ist D selbstadjungiert? Bestimme jedenfalls die Adjungierte, falls sie existiert.
   (b) Ist $\Delta := -D \circ D$ selbstadjungiert?
   (c) Sei $U \subset V$ das lineare Erzeugnis der Funktionen
$$\{x \mapsto \cos(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{x \mapsto \sin(nx) \mid n \in \mathbb{Z}\}\,,$$
mit dem von V induzierten Skalarprodukt. Finde eine Orthonormalbasis von U, welche aus Eigenvektoren von $\Delta|_U$ besteht, sowie die Multiplizitäten aller Eigenwerte.

5. Betrachte die reelle symmetrische Matrix

$$G := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Führe für G eine Hauptachsentransformation durch, d. h., finde eine orthogonale Matrix S, so dass $S^T G S$ eine Diagonalmatrix ist.

Hinweis: Alle Eigenwerte von G sind ganzzahlig.

6. Sei β die Bilinearform $(x, y) \mapsto x^T A y$ auf $\mathbb{R}^2$ für die symmetrische Matrix $A := \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$. Finde eine geordnete Basis B von $\mathbb{R}^2$, bezüglich welcher β eine Darstellungsmatrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$ hat.

7. Betrachte die durch die folgende Formel definierte quadratische Form q auf $\mathbb{R}^4$:

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) \ := \ 4x_1^2 - 12x_1x_2 + 12x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_4 - 4x_3x_4 + 3x_4^2\,.$$

Ist q positiv definit? Ist q ausgeartet? Was ist die Signatur von q?

Hinweis: Verwende quadratische Ergänzung.

8. Sei K ein Körper mit $1 + 1 \neq 0$. Sei q eine homogene quadratische Form in n Variablen mit Koeffizienten in K. Zeige, dass q nach einer linearen Variablentransformation Diagonalgestalt bekommt, das heisst, dass eine Matrix $U \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert und Koeffizienten $b_i \in K$, so dass

$$q\big((y_1, \ldots, y_n)U\big) \ = \ \sum_{i=1}^{n} b_i y_i^2.$$