D-MATH
Prof. Richard Pink

Lineare Algebra II

FS 2022

Serie 21

Spektralsatz mit Anwendungen, unitäre Vektorräume

1. Betrachte die reelle symmetrische Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finde *ohne Berechnung der Eigenwerte* ein $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, so dass $S^T BS$ diagonal ist.

*2. Seien A und B zwei reelle symmetrische $n \times n$-Matrizen mit A positiv definit.

(a) Zeige, dass eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ existiert, so dass $S^T AS$ und $S^T BS$ beide Diagonalmatrizen sind.

(b) Gilt dasselbe ohne die Positiv-Definitheit von A? Untersuche zum Beispiel die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

3. Seien A und B symmetrische reelle $n \times n$-Matrizen mit A positiv definit. Zeige, dass ein $c_0 \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $cA + B$ positiv definit ist für alle $c > c_0$.

4. Welche der folgenden drei reellen symmetrischen Matrizen sind positiv definit?

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 6 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verwende das Hauptminorenkriterium.

5. Sei A die positiv-definite reelle symmetrische Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 53 & -4 & -26 \\ -4 & 29 & 22 \\ -26 & 22 & 44 \end{pmatrix}.$$

Finde eine positiv-definite reelle symmetrische Matrix B mit $B^2 = A$.

6. (a) Bestimme eine Singulärwertzerlegung $A = QDR$ der reellen Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Gib eine Singulärwertzerlegung von A^T an.

7. Zeige, dass das charakteristische Polynom jeder hermiteschen Matrix reelle Koeffizienten hat.

8. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum. Zeige, dass zu jeder Sesquilinearform $f : V \times V \to \mathbb{C}$ eine eindeutige lineare Abbildung $T_f : V \to V$ existiert mit

$$\forall x, y \in V\colon\ f(x, y) = \langle T_f x, y \rangle .$$