D-MATH — Lineare Algebra II — FS 2022

Prof. Richard Pink

Serie 22

Unitäre Vektorräume

1. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Vektorraum.

   (a) Zeige für alle $x, y \in V$ die *Polarisationsformel*
   $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2\Big).$$

   (b) Sei $f : V \to V$ eine bijektive lineare Abbildung. Zeige
   $$f \text{ ist unitär} \quad\Longleftrightarrow\quad \forall v \in V : \langle f(v), f(v)\rangle = \langle v, v\rangle$$

2. Sei $n \geqslant 1$ und sei $\zeta := e^{2\pi i/n}$. Zeige, dass die folgende komplexe Matrix unitär ist:
   $$A := \Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\zeta^{(k-1)(\ell-1)}\Big)_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}.$$

*3. Im Abschnitt 11.11 der Vorlesung wurde der folgende Satz präsentiert. Führe seinen Beweis aus in Analogie zu dem entsprechenden Beweis im reellen Fall.

   Satz: Für jede hermitesche $n \times n$-Matrix $A = \big(a_{k\ell}\big)_{k,\ell=1,\ldots,n}$ sind äquivalent:

   (a) Die Matrix A ist positiv definit.

   (b) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

   (c) Es existiert eine invertierbare Matrix B mit $A = B^*B$.

   (d) Es existiert eine invertierbare obere Dreiecksmatrix R mit $A = R^*R$. (Cholesky-Zerlegung)

   (e) Es existiert eine invertierbare hermitesche Matrix C mit $A = C^*C = C^2$.

   (f) Die Determinante der Matrix $A_m := \big(a_{k\ell}\big)_{k,\ell=1,\ldots,m}$ ist positiv für jedes $1 \leqslant m \leqslant n$. (Hauptminorenkriterium)

4. Seien V und W endlichdimensionale unitäre Vektorräume und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Die Singulärwerte von f sind definiert als die Quadratwurzeln der positiven Eigenwerte von $f^* \circ f$.

   Zeige: Eine Zahl $\sigma \in \mathbb{R}^{>0}$ ist ein Singulärwert von f genau dann, wenn gilt:
   $$\exists\, v \in V \smallsetminus \{0\},\ \exists\, w \in W \smallsetminus \{0\} : f(v) = \sigma w \ \wedge\ f^*(w) = \sigma v\,.$$

5. Bestimme eine Singulärwertzerlegung $A = QDR$ der komplexen Matrix
   $$A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+2i & i & 0 \\ -i & 3+2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix}.$$