Lineare Algebra II

FS 2022

Serie 23

Normale Endomorphismen und Isometrien

1. Seien f und g zwei normale Endomorphismen eines endlichdimensionalen unitären Vektorraumes V. Zeige: Falls f und g kommutieren, so

   (a) kommutieren f, g, f^*, und g^* alle miteinander.

   (b) ist $f + g$ normal.

   (c) ist $f \circ g$ normal.

   (d) Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ ist λf normal.

2. Beweise oder widerlege: Jeder normale Endomorphismus f eines unitären Vektorraumes V ist eine Linearkombination von miteinander kommutierenden selbstadjungierten Endomorphismen.

3. Betrachte den unitären Vektorraum $V := \mathbb{C}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Finde Endomorphismen f und g von V mit der Eigenschaft:

   (a) f ist normal, aber nicht selbstadjungiert.

   (b) f ist diagonalisierbar, aber nicht normal.

   (c) f^2 ist normal, aber f nicht.

   (d) f und g sind normal, aber $f + g$ nicht.

4. Sei A eine symmetrische positiv definite reelle Matrix. Zeige, dass eine eindeutige symmetrische reelle Matrix B existiert mit $\exp(B) = A$.

5. Gegeben sei die reelle Matrix

$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Zeige, dass A orthogonal und $\det A = 1$ ist.

   (b) Bestimme die Drehachse und den Drehwinkel von L_A.

6. Zeige: Für jeden orthogonalen Endomorphismus f eines n-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V gilt

$$|\operatorname{Spur}(f)| \leqslant n.$$

   Für welche f gilt Gleichheit?

*7. Betrachte die folgenden zwei Ebenen in $\mathbb{R}^3$:

$$E_1 := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{und} \qquad E_2 := \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Finde alle Drehungen T von $\mathbb{R}^3$ mit $T(E_1) = E_2$.

(Für die Endrechnung dürfen Sie gerne ein Computeralgebrasystem benutzen.)

*8. *Beispiel zur speziellen Relativitätstheorie.* Definiere die symmetrische Bilinearform $s\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ für alle $v = (x, y, z, t)^T$ und $v' = (x', y', z', t')^T$ in $\mathbb{R}^4$ durch

$$s(v, v') := xx' + yy' + zz' - ctt',$$

wobei $c > 0$ ein fester Parameter ist. Der Raum $M := (\mathbb{R}^4, s)$ heisst die *Minkowski-Raumzeit* und der Parameter c heisst die *Lichtgeschwindigkeit.* Wir werden die Normalisierung $c = 1$ verwenden.

Eine lineare Abbildung $F : M \to M$ heisst eine *Isometrie* oder eine *Lorentztransformation*, falls gilt

$$\forall v, w \in \mathbb{R}^4\colon\ s\big(F(v), F(w)\big) = s(v, w)\,.$$

(a) Beweise, dass jede Isometrie bijektiv ist.

(b) Beweise, dass die folgenden Endomorphismen Isometrien von M sind:

(i) Die Linksmultiplikation mit $\left(\begin{array}{c|c} T & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \end{array}\right)$ für jedes $T \in O(3)$.

(ii) Ein *Lorentzboost* in x-Richtung mit der Geschwindigkeit $v < c = 1$, gegeben durch Linksmultiplikation mit der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} \gamma & & & -v\gamma \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ -v\gamma & & & \gamma, \end{pmatrix}$$

für $\gamma := 1/\sqrt{1 - v^2}$.

**(c) Die Teilmenge $\{x \in M \mid s(x, x) = 0\}$ heisst der *Lichtkegel in M*. Beweise den „relativistischen Satz vom Fussball“: Jede lineare Isometrie φ mit $\det(\varphi) = 1$ besitzt einen Eigenvektor, der im Lichtkegel liegt.

Bemerkung. Für $c \to \infty$ nähert sich der Lichtkegel dem Unterraum $\{t = 0\}$ an und die Aussage reduziert sich auf den klassischen Fall.