Serie 24

Multilineare Abbildungen, Tensorprodukt

1. Beweise die folgende Propositionen aus der Vorlesung mit allen Details:

   (a) Für alle K-Vektorräume $V_1, \ldots, V_r$ und W ist $\mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W)$ ein Unterraum des Raums aller Abbildungen $V_1 \times \cdots \times V_r \to W$.

   (b) Betrachte lineare Abbildungen von K-Vektorräumen $f_i \colon V_i' \to V_i$ für $1 \leqslant i \leqslant r$ sowie $g \colon W \to W'$. Dann erhalten wir eine lineare Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mult}_K(V_1, \ldots, V_r; W) & \to & \mathrm{Mult}_K(V_1', \ldots, V_r'; W'), \\ \varphi & \mapsto & g \circ \varphi \circ (f_1 \times \cdots \times f_r). \end{array}$$

*2. Sei V ein Vektorraum der Dimension $n < \infty$, und sei f ein Endomorphismus von V mit dem charakteristischen Polynom $\mathrm{char}_f(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Für alle $r \geqslant 0$ betrachte die induzierte Abbildung

$$\mathrm{Alt}^r(f)\colon \;\; \mathrm{Alt}_K^r(V, K) \to \mathrm{Alt}_K^r(V, K), \;\; \varphi \mapsto \varphi \circ (f \times \ldots \times f).$$

Zeige: Für alle $r = 0, \ldots, n$ gilt

$$a_{n-r} = (-1)^r \,\mathrm{Spur}\, \mathrm{Alt}^r(f).$$

3. Sei $f : V \to V'$ eine lineare Abbildung. Zeige die folgenden universellen Eigenschaften:

   (a) f ist injektiv genau dann, wenn für alle Vektorräume W die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(W, V) \to \mathrm{Hom}_K(W, V'), \;\; g \mapsto f \circ g$$

   injektiv ist.

   (b) f ist surjektiv genau dann, wenn für alle Vektorräume W die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V', W) \to \mathrm{Hom}_K(V, W), \;\; g \mapsto g \circ f$$

   injektiv ist.

   (c) $\mathrm{Kern}(f)$ ist der einzige Unterraum $U \subset V$ mit der Eigenschaft:

   Für alle Vektorräume W und alle linearen Abbildungen $g : W \to V$ gilt:

$$f \circ g = 0 \iff \mathrm{Bild}(g) \subset U\,.$$

4. Gegeben sei eine Menge I. Für ein Paar (U,ι) bestehend aus einem K-Vektorraum U und einer Abbildung $\iota\colon I \to U$ betrachte die folgende *universelle Eigenschaft*:

   Für jeden K-Vektorraum V und für jede Abbildung $\varphi\colon I \to V$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\overline{\varphi}\colon U \to V$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ U \arrow[r, "\overline{\varphi}"'] & V. \end{tikzcd}$$

   (a) Zeige, dass für je zwei Paare (U,ι) und (U',ι') mit dieser universellen Eigenschaft ein eindeutiger Isomorphismus $\psi\colon U \xrightarrow{\sim} U'$ mit $\psi\circ\iota = \iota'$ existiert.

   (b) Zeige, dass die universelle Eigenschaft gilt für den K-Vektorraum

$$K^{(I)} := \big\{ (x_i)_{i\in I} \in K^I \;\big|\; x_i = 0 \text{ für fast alle } i \,\big\}$$

   mit der Abbildung

$$\iota_I : I \to K^{(I)}, \quad i \mapsto (\delta_{ij})_{j\in I}\,.$$

5. Zeige die Existenz des Tensorprodukts $V_1 \otimes V_2$ durch die folgende Konstruktion: Für jedes Paar $(v_1,v_2) \in V_1 \times V_2$ bezeichne mit $[v_1,v_2]$ die Funktion $V_1 \times V_2 \to K$ mit dem Wert 1 an der Stelle (v_1,v_2) und allen anderen Werten gleich 0. Diese Funktionen bilden eine Basis des K-Vektorraums $F := K^{(V_1\times V_2)}$. Sei R der von allen Elementen der Form

$$\begin{aligned} &[v_1+v_1',v_2]-[v_1,v_2]-[v_1',v_2], \qquad &&[\lambda v_1,v_2]-\lambda\cdot[v_1,v_2],\\ &[v_1,v_2+v_2']-[v_1,v_2]-[v_1,v_2'], \qquad &&[v_1,\lambda v_2]-\lambda\cdot[v_1,v_2], \end{aligned}$$

   für alle $v_1,v_1' \in V_1$ und $v_2,v_2' \in V_2$ und $\lambda \in K$ erzeugte Unterraum. Betrachte die Abbildung

$$\kappa\colon\; V_1 \times V_2 \to F/R, \quad (v_1,v_2) \mapsto [v_1,v_2] + R.$$

   Zeige, dass das Paar $(F/R,\kappa)$ die universelle Eigenschaft für das Tensorprodukt $V_1 \otimes V_2$ erfüllt.

6. Vereinfache den folgenden Ausdruck in $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^3$.

$$-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}$$

*7. Folgere direkt aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts, dass $V_1 \otimes V_2$ von den *reinen Tensoren* $v_1 \otimes v_2$ für alle $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ erzeugt wird.