Serie 25

Tensorprodukt, Körpererweiterungen

1. Betrachte Vektorräume V_1 und V_2 mit $0 < n := \min\{\dim_K(V_1), \dim_K(V_2)\} < \infty$. Zeige, dass jeder Tensor in $V_1 \otimes_K V_2$ eine Summe von n reinen Tensoren ist, aber im allgemeinen nicht von $n-1$ reinen Tensoren.

2. Zeige: Für alle K-Vektorräume V und W existiert ein natürlicher injektiver Homomorphismus
$$V^\vee \otimes W^\vee \hookrightarrow (V \otimes W)^\vee.$$
Dieser ist ein Isomorphismus genau dann, wenn V oder W endlich-dimensional ist.

3. Sei V ein Vektorraum der Dimension n und sei t ein Element von $V \otimes_K V$. Seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $B' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ geordnete Basen von V und schreibe
$$t \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot b_i \otimes b_j \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha'_{ij} \cdot b'_i \otimes b'_j$$
mit eindeutigen Koeffizienten $\alpha_{ij}, \alpha'_{ij} \in K$. Beschreibe die Beziehung zwischen den Matrizen
$$A := (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \quad \text{und} \quad A' := (\alpha'_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$
in Termen der Basiswechselmatrix ${}_{B'}[\mathrm{id}]_B$.

*4. Beweise: Für jeden Vektorraum V und für jede Menge $\{W_i\}_{i \in I}$ von Vektorräumen W_i existiert ein natürlicher Isomorphismus
$$V \otimes_K \Big(\boxplus_{i \in I} W_i \Big) \xrightarrow{\cong} \boxplus_{i \in I} (V \otimes_K W_i)$$

5. Sei $f \colon V \to V'$ eine lineare Abbildung von K-Vektorräumen, und sei L ein Oberkörper von K. Zeige:
   (a) Die Abbildung $f_L := f \otimes \mathrm{id}_L \colon V_L \to V'_L$ ist L-linear.
   (b) $\mathrm{Kern}(f_L) = \mathrm{Kern}(f) \otimes_K L$.
   (c) $\mathrm{Bild}(f_L) = \mathrm{Bild}(f) \otimes_K L$.
   (d) $\mathrm{Rang}_L(f_L) = \mathrm{Rang}_K(f)$.

6. Sei V ein reeller Vektorraum und sei I ein Endomorphismus mit $I^2 = -\mathrm{id}_V$. Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren seiner Komplexifizierung

$$I_{\mathbb{C}} := I \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}}).$$

*7. Zeige: Zwei reelle $n \times n$-Matrizen A und A' sind ähnlich über $\mathbb{R}$ genau dann, wenn sie ähnlich über $\mathbb{C}$ sind.

8. Sei $\big(V, \langle\ ,\ \rangle\big)$ ein unitärer Vektorraum. Sei $V_{\mathbb{R}} := V$ aufgefasst als *reeller* Vektorraum. Zeige:

   (a) Der Realteil $\mathrm{Re}\langle\ ,\ \rangle$ ist ein (euklidisches) Skalarprodukt auf $V_{\mathbb{R}}$.

   (b) Für jede Orthonormalbasis B von $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ist

   $$\big\{v, iv \;\big|\; v \in B\big\}$$

   eine Orthonormalbasis von $(V_{\mathbb{R}}, \mathrm{Re}\langle\ ,\ \rangle)$.

   (c) Jeder unitäre Endomorphismus von V ist ein orthogonaler Endomorphismus von $V_{\mathbb{R}}$.