D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2022
Prof. Richard Pink

Serie 26

Tensorpotenzen und Äussere Potenzen

1. Seien α, β, γ Vektoren in einem K-Vektorraum. Vereinfache die Ausdrücke
   (a) $(\alpha - \beta) \wedge (\alpha + \beta)$,
   (b) $(\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma) \wedge (\gamma - \alpha)$,
   (c) $(\beta - \alpha) \wedge (\gamma - \alpha) + (\alpha + \gamma) \wedge \gamma - \beta \wedge \gamma$.

2. Unter welchen Bedingungen an $v_1, \ldots, v_r \in V$ ist
   (a) $v_1 \otimes \ldots \otimes v_r = 0$ in $V^{\otimes r}$?
   (b) $v_1 \cdots v_r = 0$ in $S^r V$?
   (c) $v_1 \wedge \ldots \wedge v_r = 0$ in $\Lambda^r V$?

3. Unter welchen Bedingungen an $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ existieren $w_1, w_2 \in V$ mit
   (a) $v_1 \otimes v_2 + v_3 \otimes v_4 = w_1 \otimes w_2$ in $V^{\otimes 2}$?
   (b) $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4 = w_1 \wedge w_2$ in $\Lambda^2 V$?

4. Seien $v_1, \ldots, v_k$ linear unabhängige Vektoren in einem Vektorraum V. Zeige:
$$\langle v_1, \ldots, v_k \rangle = \{ x \in V \mid v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \wedge x = 0 \}$$

5. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung von endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Für jedes $r \geqslant 0$ betrachte die lineare Abbildung $\Lambda^r f : \Lambda^r V \to \Lambda^r W$. Zeige:
   (a) f ist injektiv genau dann, wenn $\Lambda^r f$ ungleich Null ist für $r = \dim(V)$.
   (b) f ist surjektiv genau dann, wenn $\Lambda^r f$ ungleich Null ist für $r = \dim(W)$.

*6. Ein Element $\alpha \in \Lambda^k V$ heisst rein, falls Vektoren $w_1, \ldots, w_k \in V$ existieren mit $\alpha = w_1 \wedge \ldots \wedge w_k$. Zeige:
   (a) Für jedes $\alpha \in \Lambda^2 V$ existiert eine Basis $\{b_i\}_{i \in I}$ von V und ein $k \geqslant 0$ mit $\{1, \ldots, 2k\} \subset I$ und $\alpha = b_1 \wedge b_2 + \ldots + b_{2k-1} \wedge b_{2k}$.
   (b) Ist $2 \neq 0$ in K, so ist $\alpha \in \Lambda^2 V$ genau dann rein, wenn $\alpha \wedge \alpha = 0$ ist in $\Lambda^4 V$.