D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2022
Prof. Richard Pink

Serie 27

Tensoralgebra und Vektorprodukt

1. Sei V ein K-Vektorraum von endlicher Dimension n.

   (a) Zeige, dass es genau eine lineare Abbildung $e : V^\vee \otimes V \to K$ gibt mit der Eigenschaft $e(\ell \otimes v) = \ell(v)$ für alle $\ell \in V^\vee$ und $v \in V$.

   (b) Betrachte den natürlichen Isomorphismus $N : V^\vee \otimes V \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, V)$ aus der Vorlesung. Zeige, dass für jede lineare Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ gilt:

   $$e(N^{-1}(f)) = \mathrm{Spur}(f)$$

   (c) Folgere, dass die zusammengesetzte Abbildung

   $$K \xrightarrow{x \mapsto x \cdot \mathrm{id}_V} \mathrm{Hom}(V, V) \xrightarrow{N^{-1}} V^\vee \otimes V \xrightarrow{e} K$$

   die Multiplikation mit n ist.

   (d) Wo genau geht das schief, wenn V unendliche Dimension hat?

*2. Sei r eine natürliche Zahl mit $r! \neq 0$ in K. Konstruiere für jeden endlich-dimensionalen K-Vektorraum V einen natürlichen Isomorphismus

   $$S_K^r(V^\vee) \cong (S_K^r V)^\vee.$$

3. Seien V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und v ein festes Element von V.

   (a) Man zeige, dass

   $$\iota_v \colon\ \mathrm{Alt}^r(V, K) \to \mathrm{Alt}^{r-1}(V, K),\ \omega \mapsto ((v_1, \ldots, v_{r-1}) \mapsto \omega(v_1, \ldots, v_{r-1}, v))$$

   eine wohldefinierte lineare Abbildung ist.

   (b) Es seien $\varphi_r \colon \Lambda^r(V^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^r(V, K)$ und $\varphi_{r-1} \colon \Lambda^{r-1}(V^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alt}^{r-1}(V, K)$ die aus der Vorlesung bekannten natürlichen Isomorphismen. Man beschreibe die induzierte Abbildung

   $$\iota'_v := \varphi_{r-1}^{-1} \circ \iota_v \circ \varphi_r \colon \Lambda^r(V^\vee) \longrightarrow \Lambda^{r-1}(V^\vee).$$

   (c) Man zeige für alle $\beta \in \Lambda^r(V^\vee)$ und $\gamma \in \Lambda^s(V^\vee)$ die folgende Gleichung:

   $$\iota'_v(\beta \wedge \gamma) \ = \ (-1)^s \iota'_v(\beta) \wedge \gamma + \beta \wedge \iota'_v(\gamma)$$

4. Für alle $u, u', v, v', w \in \mathbb{R}^3$ zeige die folgenden Identitäten:

   (a) $u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle \cdot v - \langle u, v \rangle \cdot w$ (*Grassmann-Identität*)

   (b) $u \times (v \times w) + v \times (w \times u) + w \times (u \times v) = 0$ (*Jacobi-Identität*)

   (c) $(u \times v) \times (u' \times v') = \det(u, v, v') \cdot u' - \det(u, v, u') \cdot v'$

   (d) $\langle u \times v, u' \times v' \rangle = \langle u, u' \rangle \cdot \langle v, v' \rangle - \langle v, u' \rangle \cdot \langle u, v' \rangle$

   (e) Seien u und v linear unabhängig und $\vartheta \in [0, \pi]$ der durch die Gleichung $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \vartheta$ bestimmte Winkel. Dann gilt $\|u \times v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin \vartheta|$.