Single Choice Aufgaben 16

Minimalpolynom, Charakteristisches Polynom, Hauptraum

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Seien A und B obere Dreiecksmatrizen, die strikt oberhalb der Diagonalen die gleichen Einträge haben. Welche Aussage ist im Allgemeinen richtig?
   (a) Die charakteristischen Polynome von A und B sind gleich.
   (b) Die Minimalpolynome von A und B sind gleich.
   (c) Die Minimalpolynome von A und B können verschieden sein, haben aber denselben Grad.
   (d) Keine der Aussagen ist richtig.

2. Welche der folgenden Aussagen gilt für jeden Endomorphismus T eines endlich-dimensionalen Vektorraums V mit charakteristischem Polynom $f(X) = X^3 - X^2$?
   (a) Für jedes $v \in V$ gilt $T^3(v) = T^2(v)$.
   (b) T ist ein Isomorphismus.
   (c) T ist nicht diagonalisierbar.
   (d) T ist diagonalisierbar.

3. Der Hauptraum der reellen Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ bezüglich $X - 2$ ist
   (a) Eindimensional
   (b) Zweidimensional
   (c) Dreidimensional
   (d) Vierdimensional

4. Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes V und sei λ ein Eigenwert von f. Welche Aussage ist im Allgemeinen **falsch**?
   (a) Jeder Eigenvektor von f zum Eigenwert λ liegt im Hauptraum $\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f)$.
   (b) Jeder Vektor in $\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f)$ ist ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.
   (c) Der Hauptraum $\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f)$ ist nicht der Nullraum.
   (d) Für jeden Eigenwert μ von f mit $\mu \neq \lambda$ ist $\mathrm{Hau}_{X-\mu}(f) \cap \mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f) = \langle 0 \rangle$.

5. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**: Für beliebige ganze Zahlen $n > m \geqslant 1$ existiert eine quadratische Matrix ...
   (a) mit charakteristischem Polynom $X^m + X^n$.
   (b) mit Minimalpolynom X^m und charakteristischem Polynom X^n.
   (c) mit Minimalpolynom $X^m \cdot (X^n - 1)$.
   (d) Alle obigen Aussagen sind richtig.