Single Choice Aufgaben 17

Haupträume, Jordansche Normalform

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Für jeden Endomorphismus f eines n-dimensionalen Vektorraums V, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, und jeden Eigenwert λ von f gilt:

   (a) $\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f) = \mathrm{Kern}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$.

   (b) $\dim(\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f)) = 1$.

   (c) $\dim(\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f)) = n$.

   (d) $\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f) = \mathrm{Kern}((f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^n)$.

2. Sei A eine 3×3-Matrix mit $A \neq O_3$ und $A^2 = O_3$. Dann besitzt die Jordansche Normalform von A

   (a) 1 Jordanblock.

   (b) 2 Jordanblöcke.

   (c) 3 Jordanblöcke.

   (d) Das hängt von der genauen Matrix A ab.

3. Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes, dessen Minimalpolynom in Linearfaktoren zerfällt. Nur aus der Kenntnis der Eigenräume von f — ohne den Endomorphismus f selbst zu kennen — kann man:

   (a) Eine Jordan-Normalform von f bestimmen.

   (b) Nur die Grösse der Jordanblöcke bestimmen.

   (c) Nur die Anzahl Jordanblöcke bestimmen.

   (d) Keine der oberen Antworten.

4. Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes V und seien B und B' zwei geordnete Basen von V, für die f jeweils Jordansche Normalform hat. Dann gilt:

   (a) $B = B'$.

   (b) ${}_BM_B(f) = {}_{B'}M_{B'}(f)$.

   (c) Die Grösse und Anzahl der Jordanblöcke von ${}_BM_B(f)$ und von ${}_{B'}M_{B'}(f)$ sind gleich.

   (d) Die Matrix ${}_BM_{B'}(f)$ ist ebenfalls in Jordan-Normalform.

5. Welche Aussage ist richtig für jede komplexe $n \times n$-Matrix A mit Jordannormalform J?

   (a) A^2 hat Jordannormalform J^2.

   (b) $A + I_n$ hat Jordannormalform $J + I_n$.

   (c) A^T hat Jordannormalform J^T.

   (d) $2A$ hat Jordannormalform $2J$.