D-MATH Lineare Algebra II FS 2022
Prof. Richard Pink

Single Choice Aufgaben 18

Bilinearformen und Normen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen.
Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche der folgenden Abbildungen definiert keine Norm auf $\mathbb{R}^2$?

   (a) $\binom{x}{y} \mapsto |x| + |y|$

   (b) $\binom{x}{y} \mapsto (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$

   (c) $\binom{x}{y} \mapsto \max(|x|, |y|)$

   (d) $\binom{x}{y} \mapsto \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$

2. Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$. Welche Abbildung definiert wieder eine Norm auf $\mathbb{R}^n$?

   (a) $v \mapsto \min(\|v\|_1, 1)$

   (b) $v \mapsto |\|v\|_1 - \|v\|_2|$

   (c) $v \mapsto \|v\|_1 \cdot \|v\|_2$

   (d) $v \mapsto \|v\|_1 + \|v\|_2$

3. Sei V ein Vektorraum der Dimension mindestens 2. Welche Aussage ist richtig für jede Bilinearform β und jeden Vektor $v \in V$?

   (a) Es existiert ein $u \in V$ mit $\beta(v, u) \neq 0$.

   (b) Es gilt $\beta(v, v) \neq 0$.

   (c) Es existiert ein $u \in V \setminus \{0\}$ mit $\beta(v, u) = 0$.

   (d) Falls für ein $u \in V$ gilt $\beta(v, u) = 0$, so sind u und v linear abhängig.

4. Für die Abbildung $\beta\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}\right) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ gilt:

   (a) β ist eine nicht-symmetrische Bilinearform.

   (b) β ist eine symmetrische Bilinearform.

   (c) β ist ein Skalarprodukt.

   (d) β ist keine Bilinearform.

5. Sei V ein Vektorraum mit geordneten Basen B und B', und sei β eine Bilinearform auf V. Welche Gleichung gilt für die zugehörigen Darstellungsmatrizen?

   (a) $M_{B'}(\beta) = {}_{B'}M_B(\mathrm{id}_V) \cdot M_B(\beta) \cdot {}_BM_{B'}(\mathrm{id}_V)$

   (b) $M_{B'}(\beta) = {}_{B'}M_B(\mathrm{id}_V)^T \cdot M_B(\beta) \cdot {}_BM_{B'}(\mathrm{id}_V)$

   (c) $M_{B'}(\beta) = {}_BM_{B'}(\mathrm{id}_V)^T \cdot M_B(\beta) \cdot {}_BM_{B'}(\mathrm{id}_V)$

   (d) $M_{B'}(\beta) = {}_BM_{B'}(\mathrm{id}_V)^{-1} \cdot M_B(\beta) \cdot {}_BM_{B'}(\mathrm{id}_V)$