Single Choice Aufgaben 19

Bilinearformen und Orthogonalität

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und der dazugehörigen Norm $\|\ \|$. Für welche Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt $\|v+w\| = \|v\| + \|w\|$?

   (a) $v = \binom{1}{1},\ w = \binom{1}{0}$
   (b) $v = \binom{2}{1},\ w = \binom{1}{2}$
   (c) $v = \binom{2}{3},\ w = \binom{3}{1}$
   (d) $v = \binom{1}{2},\ w = \binom{2}{4}$

2. Für jeden $\mathbb{R}$-Vektorraum V gilt:

   (a) Für jede Bilinearform β auf V ist $\{v \in V : \beta(v,v) = 0\}$ ein Unterraum.
   (b) Für jede Bilinearform β auf V ist $\{v \in V : \beta(v,v) = 1\}$ ein Unterraum.
   (c) Für jedes Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf V ist $\{v \in V : \langle v,v\rangle \neq 0\}$ ein Unterraum.
   (d) Für jedes Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf V ist $\{v \in V : \langle v,v\rangle = 0\}$ ein Unterraum.

3. Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Aus $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$ folgt $v_1 \perp v_3$.
   (b) Aus $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$ folgt $v_1 \perp (v_2 + v_3)$.
   (c) Aus $v_1 \perp v_2$ folgt $v_1 \perp -v_2$.
   (d) Aus $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$ folgt $v_1 \perp v_3$.

4. Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $S, T \subset V$ zwei Teilmengen. Welche der folgenden Eigenschaften ist im allgemeinen nicht äquivalent zu den anderen?

   (a) $S \subset T^\perp$
   (b) $T \subset S^\perp$
   (c) $S \perp T$
   (d) $\langle S\rangle \cap \langle T\rangle = \{0\}$

5. Sei S eine Teilmenge eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) $(S^\perp)^\perp = \langle S\rangle$.
   (b) S ist das orthogonale Komplement eines Unterraumes von V.
   (c) $S^\perp$ ist ein Unterraum von V.
   (d) $V = S^\perp \oplus (S^\perp)^\perp$.