

Single Choice Aufgaben 20

ORTHOGONALITÄT UND ADJUNGIERTE ABBILDUNGEN

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Betrachte \mathbb{R}^2 mit dem Standardskalarprodukt und den Vektor $v := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Welcher Vektor w ergänzt v zu einer Orthonormalbasis von \mathbb{R}^2 ?
 - (a) $w := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 - (b) $w := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - (c) $w := \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
 - (d) $w := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n < \infty$. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?
 - (a) Jedes Orthonormalsystem in V hat Länge $\leq n$.
 - (b) Jedes Orthonormalsystem in V lässt sich zu einer Orthonormalbasis ergänzen.
 - (c) Jedes Orthonormalsystem (v_1, \dots, v_n) in V ist eine Basis von V .
 - (d) Jede Basis von V ist ein Orthonormalsystem.
3. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?
 - (a) Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal.
 - (b) Die Summe zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal.
 - (c) Die Transponierte einer orthogonalen Matrix ist orthogonal.
 - (d) Die Inverse einer orthogonalen Matrix ist orthogonal.
4. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?
 - (a) Der Identitäts-Endomorphismus von V ist selbstadjungiert.
 - (b) Der Null-Endomorphismus von V ist selbstadjungiert.
 - (c) Die Verknüpfung selbstadjungierter Endomorphismen ist selbstadjungiert.
 - (d) Die Summe zweier selbstadjungierter Endomorphismen ist selbstadjungiert.
5. Sei $f: V \rightarrow W$ ein Isomorphismus zwischen zwei euklidischen Vektorräumen mit der Adjungierten $f^*: W \rightarrow V$. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?
 - (a) Falls $f^* \circ f = 0$ ist, gilt $f = 0$.
 - (b) Es ist f orthogonal genau dann, wenn $f^* \circ f = \text{id}_V$ ist.
 - (c) Der Homomorphismus $f^* \circ f$ ist selbstadjungiert.
 - (d) Die zu $f^* \circ f$ Adjungierte ist $f \circ f^*$.