Single Choice Aufgaben 21

Bilinearformen, Positiv-Definitheit

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussage ist für einen selbstadjungierten Endomorphismus f eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraumes V im Allgemeinen *falsch*?

   (a) Es gilt $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f^2)$.

   (b) Es gilt $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Bild}(f^2)$.

   (c) Es gilt $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$.

   (d) Die Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, f(w)\rangle$ ist ein Skalarprodukt.

2. Die homogene quadratische Form $q(x, y) := x^2 - 6xy + 5y^2$ hat Darstellungsmatrix

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

3. Welche Aussage ist am Allgemeinen *falsch*?

   (a) Jede positiv definite Bilinearform ist nicht-ausgeartet.

   (b) Jede negativ definite Bilinearform ist nicht-ausgeartet.

   (c) Jede Darstellungsmatrix einer nicht-ausgearteten Bilinearform ist invertierbar.

   (d) Jede nicht-ausgeartete Bilinearform ist positiv definit oder negativ definit.

4. Sei A die Darstellungsmatrix einer symmetrischen Bilinearform mit der Signatur (d_0, d_+, d_-) auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V. Welche Aussage ist im Allgemeinen richtig?

   (a) d_0 ist die Dimension des Kerns der linearen Abbildung L_A.

   (b) d_+ ist die Anzahl strikt positiver Diagonaleinträge von A.

   (c) d_- ist die Anzahl strikt negativer Diagonaleinträge von A.

   (d) $d_+ + d_- = \dim(V)$.

5. Die reelle Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, weil ...

   (a) die Determinante von A positiv ist.

   (b) die Diagonaleinträge von A positiv sind.

   (c) $2 > 0$ ist und die Determinante von A positiv ist.

   (d) $2 > 0$ ist und die Spur von A positiv ist.