Single Choice Aufgaben 22

Quadratische Formen und Unitäre Vektorräume

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussage ist richtig für jede invertierbare relle symmetrische $n \times n$-Matrix A?

   (a) A ist positiv definit.
   (b) A^2 ist positiv definit.
   (c) A^{-1} ist positiv definit.
   (d) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $c \cdot A$ positiv definit ist.

2. Welche Aussage ist richtig für jede reelle $m \times n$-Matrix A?

   (a) Die Singulärwerte von A sind alle positiv.
   (b) A besitzt Singulärwerte nur im Fall $m = n$.
   (c) Die Singulärwerte von A sind die Eigenwerte von $A^T A$.
   (d) Eine Singulärwertzerlegung existiert nur, falls A positiv definit ist.

3. Sei γ eine hermitesche Sesquilinearform auf einem komplexen Vektorraum V. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) $\forall v \in V\colon\ \gamma(v, v) \in \mathbb{R}$.
   (b) $\forall v, w \in V\colon\ \gamma(v, w) = \gamma(w, v)$.
   (c) $\forall v, w \in V\colon\ \gamma(v + w, v) = \gamma(v, v) + \gamma(w, v)$.
   (d) $\forall v \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}\colon\ \gamma(\lambda v, v) = \gamma(v, \overline{\lambda} v)$.

4. Die komplexe Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ ist

   (a) hermitesch.
   (b) normal, aber nicht hermitesch.
   (c) symmetrisch, aber nicht normal.
   (d) unitär.

5. Sei A die Darstellungsmatrix einer hermiteschen Sesquilinearform. Dann

   (a) sind alle Einträge von A reell.
   (b) sind alle Diagonaleinträge von A reell.
   (c) ist A symmetrisch.
   (d) hat A nur reelle und positive Eigenwerte.

6. Für welche $x \in \mathbb{C}$ ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} x & -x \\ x & x \end{pmatrix}$ unitär?

   (a) Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x|^2 = \frac{1}{2}$.
   (b) Genau für $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
   (c) Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $x = -\overline{x}$.
   (d) Für $x = 0$.