Musterlösung Single Choice Aufgaben 15

Minimalpolynom

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass die Eigenwerte einer Matrix genau die Nullstellen des Minimalpolynoms sind.

1. Was ist die genaue Bedeutung von „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“?

   (a) Die zusätzliche Bedingung ist sowieso immer erfüllt.

   (b) Es macht keinen Unterschied, ob man das zusätzlich voraussetzt oder nicht.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Durch eine direkte Transformation kann man sich auf diesen Fall reduzieren.

   (d) Man behandelt nur einen einfachen Fall, der allgemeine Fall wird den Lesern überlassen.

   Erklärung: Obwohl der Ausdruck „Ohne Beschränkung der Allgemeinheit“ oft falsch gebraucht wird, bedeutet er (c) und nur (c). Am besten man sagt dann dazu, welche Transformation auf den genannten Fall führt.

2. Das Minimalpolynom der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ist gleich

   $\boxed{\text{(a)}}$ $(X-1)(X-3)^2$

   (b) $(X-1)(X-3)$

   (c) $X^3 - 9$

   (d) $X^2 - 3$

   Erklärung: Das charakteristische Polynom ist $(X-1)(X-3)^2$. Da das Minimalpolynom dieselben irreduziblen Faktoren besitzt, kann es nur dieses oder $(X-1)(X-3)$ sein. Aber man überprüft direkt, dass $(A-I)(A-3I) \neq O$ ist.

3. Sei A eine $n \times n$-Diagonalmatrix, die genau k verschiedene Werte auf der Diagonalen besitzt. Dann ist der Grad des Minimalpolynoms von A gleich

   (a) n

   $\boxed{\text{(b)}}$ k

   (c) 1

   (d) Das kann man nicht wissen.

   Erklärung: Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die k verschiedenen Werte auf der Diagonalen von A. Jeder davon ist ein Eigenwert mit einem Standardbasisvektor als zugehörigem Eigenvektor und daher eine Nullstelle des Minimalpolynoms. Somit ist das Minimalpolynom ein Vielfaches des Polynoms $P(X) := (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_k)$. Umgekehrt überprüft man direkt, dass $P(A)$ eine Diagonalmatrix mit den Werten $P(\lambda_i) = 0$ auf der Diagonale ist. Also gilt $P(A) = 0$; somit ist P das Minimalpolynom.

4. Welche der folgenden Aussagen ist im Allgemeinen falsch für eine $n \times n$-Matrix A mit dem Minimalpolynom φ?

   (a) φ ist ein normiertes Polynom vom kleinstmöglichen Grad mit $\varphi(A) = 0$.

   (b) Ist A keine Diagonalmatrix, so hat φ mindestens Grad 2.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Besitzt A einen Eigenwert von mehrfacher algebraischer Multiplizität, so ist φ nicht das charakteristische Polynom.

   (d) Besitzt A genau n verschiedene Eigenwerte, so ist φ das charakteristische Polynom.

   Erklärung: Die Aussage (c) ist falsch: Zum Beispiel ist für $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sowohl das Minimalpolynom als auch das charakteristische Polynom gleich $(X-1)^2$.

5. Sei A eine quadratische Matrix mit charakteristischem Polynom $X^2 - X - 1$. Dann gilt:

   (a) A ist nicht invertierbar.

   (b) $A^{-1} = A + I$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ $A^{-1} = A - I$.

   (d) Die gegebenen Informationen reichen nicht aus.

   Erklärung: Nach Cayley-Hamilton gilt $A^2 - A - I = O$, also $(A-I)A = A^2 - A = I$. Somit ist A invertierbar mit der Inversen $A^{-1} = A - I$.