Musterlösung Single Choice Aufgaben 16

Minimalpolynom, Charakteristisches Polynom, Hauptraum

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Seien A und B obere Dreiecksmatrizen, die strikt oberhalb der Diagonalen die gleichen Einträge haben. Welche Aussage ist im Allgemeinen richtig?

   (a) Die charakteristischen Polynome von A und B sind gleich.

   (b) Die Minimalpolynome von A und B sind gleich.

   (c) Die Minimalpolynome von A und B können verschieden sein, haben aber denselben Grad.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Keine der Aussagen ist richtig.

   Erklärung: Die Matrizen $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)$ haben die charakteristischen Polynome $(X-1)^2$ bzw. $(X-1)(X-2)$, und die Minimalpolynome $X-1$ bzw. $(X-1)(X-2)$. Darum sind alle drei Aussagen falsch.

2. Welche der folgenden Aussagen gilt für jeden Endomorphismus T eines endlich-dimensionalen Vektorraums V mit charakteristischem Polynom $f(X) = X^3 - X^2$?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Für jedes $v \in V$ gilt $T^3(v) = T^2(v)$.

   (b) T ist ein Isomorphismus.

   (c) T ist nicht diagonalisierbar.

   (d) T ist diagonalisierbar.

   Erklärung: Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $T^3 - T^2 = 0$, also $T^3 = T^2$; daher gilt (a). Dagegen sehen wir am charakteristischen Polynom, dass T den Eigenwert 0 hat; darum ist (b) falsch. Die folgenden Matrizen liefern Gegenbeispiele zu (c) beziehungsweise (d):

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

3. Der Hauptraum der reellen Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ bezüglich $X-2$ ist

   (a) Eindimensional

   (b) Zweidimensional

   $\boxed{\text{(c)}}$ Dreidimensional

   (d) Vierdimensional

   Erklärung: Unabhängig davon, was oberhalb der Diagonalen steht, ist das charakteristische Polynom $(X-2)^3(X-3)$; also hat der Hauptraum bezüglich $X-2$ die Dimension 3.

4. Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes V und sei λ ein Eigenwert von f. Welche Aussage ist im Allgemeinen **falsch**?

   (a) Jeder Eigenvektor von f zum Eigenwert λ liegt im Hauptraum $\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f)$.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Jeder Vektor in $\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f)$ ist ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ.

   (c) Der Hauptraum $\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f)$ ist nicht der Nullraum.

   (d) Für jeden Eigenwert μ von f mit $\mu \neq \lambda$ ist $\mathrm{Hau}_{X-\mu}(f) \cap \mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f) = \langle 0 \rangle$.

   Erklärung: Aus der Definition des Hauptraums folgt (a), und da nach Voraussetzung ein Eigenvektor zum Eigenwert λ existiert, folgt (c). Aussage (d) wurde in der Vorlesung bewiesen. Dagegen ist (b) im Allgemeinen falsch; zum Beispiel ist der Hauptraum der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ bezüglich $X-1$ zweidimensional, aber der Eigenraum eindimensional.

5. Welche der folgenden Aussagen ist **falsch**: Für beliebige ganze Zahlen $n > m \geqslant 1$ existiert eine quadratische Matrix ...

   (a) mit charakteristischem Polynom $X^m + X^n$.

   (b) mit Minimalpolynom X^m und charakteristischem Polynom X^n.

   (c) mit Minimalpolynom $X^m \cdot (X^n - 1)$.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Alle obigen Aussagen sind richtig.

   Erklärung: Die Begleitmatrix eines beliebigen normierten Polynoms φ hat Minimal- und charakteristisches Polynom φ; daher sind (a) und (c) richtig. Auch (b) ist richtig, zum Beispiel für eine Blockdiagonalmatrix mit einem Jordanblock der Grösse m und $n-m$ Jordanblöcken der Grösse 1, beide zum Eigenwert 0.