Musterlösung Single Choice Aufgaben 17

Haupträume, Jordansche Normalform

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Für jeden Endomorphismus f eines n-dimensionalen Vektorraums V, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, und jeden Eigenwert λ von f gilt:

   (a) $\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f) = \mathrm{Kern}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)$.

   (b) $\dim(\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f)) = 1$.

   (c) $\dim(\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f)) = n$.

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f) = \mathrm{Kern}((f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^n)$.

   Erklärung: Sei m die algebraische Multiplizität von λ. Dann gilt $m \leqslant n$ und $\mathrm{Hau}_{X-\lambda}(f) := \mathrm{Kern}((f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^m) \subset \mathrm{Kern}((f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^n)$. Aus der Hauptraumzerlegung folgt, dass diese Inklusion eine Gleichheit ist. Also ist (d) richtig.

   Dagegen ist (a) falsch, wenn f nicht diagonalisierbar ist. Sodann ist (b) falsch, wenn f einen Eigenwert von geometrischer Multiplizität > 1 hat. Schliesslich ist (c) falsch, wenn f verschiedene Eigenwerte besitzt.

2. Sei A eine 3×3-Matrix mit $A \neq O_3$ und $A^2 = O_3$. Dann besitzt die Jordansche Normalform von A

   (a) 1 Jordanblock.

   $\boxed{\text{(b)}}$ 2 Jordanblöcke.

   (c) 3 Jordanblöcke.

   (d) Das hängt von der genauen Matrix A ab.

   Erklärung: Eine nilpotente Matrix hat nur den Eigenwert 0, also sind die möglichen Jordan-Normalformen $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die erste Matrix hat Quadrat ungleich Null, und weil A auch nicht die Nullmatrix ist, bleibt nur die mittlere Option, also hat die Jordansche Normalform zwei Jordanblöcke.

3. Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes, dessen Minimalpolynom in Linearfaktoren zerfällt. Nur aus der Kenntnis der Eigenräume von f — ohne den Endomorphismus f selbst zu kennen — kann man:

   (a) Eine Jordan-Normalform von f bestimmen.

   (b) Nur die Grösse der Jordanblöcke bestimmen.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Nur die Anzahl Jordanblöcke bestimmen.

   (d) Keine der oberen Antworten.

   Erklärung: Die Dimension des Eigenraumes eines Eigenwertes ist die Anzahl dazugehöriger Jordanblöcke. Um die Grösse der jeweiligen Jordanblöcke zu bestimmen, brauchen wir aber mehr Informationen.

4. Sei f ein Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes V und seien B und B' zwei geordnete Basen von V, für die f jeweils Jordansche Normalform hat. Dann gilt:

   (a) $B = B'$.

   (b) ${}_BM_B(f) = {}_{B'}M_{B'}(f)$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Die Grösse und Anzahl der Jordanblöcke von ${}_BM_B(f)$ und von ${}_{B'}M_{B'}(f)$ sind gleich.

   (d) Die Matrix ${}_BM_{B'}(f)$ ist ebenfalls in Jordan-Normalform.

   Erklärung: Der Identitäts-Endomorphismus mit beliebigen Basen liefert ein Gegenbeispiel zu (a) und (d); dabei kann ${}_BM_{B'}(f)$ sogar eine beliebige invertierbare Matrix sein. Da verschiedene Jordanblöcke vertauscht werden können, ist auch (b) falsch. Dagegen ist (c) Teil des Satzes über die Jordan-Normalform.

5. Welche Aussage ist richtig für jede komplexe $n \times n$-Matrix A mit Jordannormalform J?

   (a) A^2 hat Jordannormalform J^2.

   $\boxed{\text{(b)}}$ $A + I_n$ hat Jordannormalform $J + I_n$.

   (c) A^T hat Jordannormalform J^T.

   (d) $2A$ hat Jordannormalform $2J$.

   Erklärung: Die rationale Matrix $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ hat Jordannormalform, aber die Matrizen $J^2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $J^T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $2J = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ alle nicht. Über den komplexen Zahlen ist A trigonalisierbar und deshalb besteht J aus Jordanblöcken, die obere Dreiecksmatrizen sind. Deswegen ist $J + I_n$ in Jordannormalform und die gleiche Basistransformation, die A in J überführt, überführt $A + I_n$ auch in $J + I_n$.