Musterlösung Single Choice Aufgaben 18

Bilinearformen und Normen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche der folgenden Abbildungen definiert keine Norm auf $\mathbb{R}^2$?

   (a) $\binom{x}{y} \mapsto |x| + |y|$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\binom{x}{y} \mapsto (\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|})^2$

   (c) $\binom{x}{y} \mapsto \max(|x|, |y|)$

   (d) $\binom{x}{y} \mapsto \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$

   Erklärung: (a), (c) und (d) sind die ℓ_p-Normen für $p = 1$, $p = \infty$ und $p = 2$. Die Abbildung in (b) erfüllt die Dreiecksungleichung nicht.

2. Seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$. Welche Abbildung definiert wieder eine Norm auf $\mathbb{R}^n$?

   (a) $v \mapsto \min(\|v\|_1, 1)$

   (b) $v \mapsto |\|v\|_1 - \|v\|_2|$

   (c) $v \mapsto \|v\|_1 \cdot \|v\|_2$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $v \mapsto \|v\|_1 + \|v\|_2$

   Erklärung: Die Abbildungen in (a) und (c) erfüllen die Multiplikativität nicht. Die Abbildung in (b) erfüllt das Separiertheitsaxiom nicht. Bei der Abbildung in (d) kann man direkt die drei Axiome überprüfen.

3. Sei V ein Vektorraum der Dimension mindestens 2. Welche Aussage ist richtig für jede Bilinearform β und jeden Vektor $v \in V$?

   (a) Es existiert ein $u \in V$ mit $\beta(v, u) \neq 0$.

   (b) Es gilt $\beta(v, v) \neq 0$.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Es existiert ein $u \in V \smallsetminus \{0\}$ mit $\beta(v, u) = 0$.

   (d) Falls für ein $u \in V$ gilt $\beta(v, u) = 0$, so sind u und v linear abhängig.

   Erklärung: Aussagen (a) und (b) sind falsch für $v = 0$. Dagegen ist (c) richtig, denn $\beta(v, \cdot)\colon V \to K$ ist eine lineare Abbildung von dem Vektorraum V der Dimension $\geqslant 2$ in einen Vektorraum der Dimension 1 und hat deshalb einen nicht-trivialen Kern. Schliesslich bedeutet die Bedingung $\beta(v, u) = 0$ in (d), dass v und u zueinander orthogonal sind, und wenn sie ausserdem beide $\neq 0$ sind, dann sind sie gerade nicht linear abhängig; somit ist (d) falsch.

4. Für die Abbildung $\beta\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}\right) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ gilt:

   $\boxed{\text{(a)}}$ β ist eine nicht-symmetrische Bilinearform.

   (b) β ist eine symmetrische Bilinearform.

   (c) β ist ein Skalarprodukt.

   (d) β ist keine Bilinearform.

   Erklärung: Da die Determinante in jeder Spalte separat linear ist, ist β eine Bilinearform. Sie ist ausserdem ungleich Null, aber nicht symmetrisch, sondern es gilt $\beta(v, w) = -\beta(w, v)$.

5. Sei V ein Vektorraum mit geordneten Basen B und B', und sei β eine Bilinearform auf V. Welche Gleichung gilt für die zugehörigen Darstellungsmatrizen?

   (a) $M_{B'}(\beta) = {}_{B'}M_B(\mathrm{id}_V) \cdot M_B(\beta) \cdot {}_{B}M_{B'}(\mathrm{id}_V)$

   (b) $M_{B'}(\beta) = {}_{B'}M_B(\mathrm{id}_V)^T \cdot M_B(\beta) \cdot {}_{B}M_{B'}(\mathrm{id}_V)$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $M_{B'}(\beta) = {}_{B}M_{B'}(\mathrm{id}_V)^T \cdot M_B(\beta) \cdot {}_{B}M_{B'}(\mathrm{id}_V)$

   (d) $M_{B'}(\beta) = {}_{B}M_{B'}(\mathrm{id}_V)^{-1} \cdot M_B(\beta) \cdot {}_{B}M_{B'}(\mathrm{id}_V)$

   Erklärung: (c) ist die korrekte Basiswechselformel für Bilinearformen. (a) und (d) wären die richtige Basiswechselformel für Endomorphismen, sind hier aber falsch.