Musterlösung Single Choice Aufgaben 19

Bilinearformen und Orthogonalität

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Betrachte den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit dem Standard-Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und der dazugehörigen Norm $\|\ \|$. Für welche Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt $\|v+w\| = \|v\| + \|w\|$?

   (a) $v = \binom{1}{1},\ w = \binom{1}{0}$

   (b) $v = \binom{2}{1},\ w = \binom{1}{2}$

   (c) $v = \binom{2}{3},\ w = \binom{3}{1}$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $v = \binom{1}{2},\ w = \binom{2}{4}$

   Erklärung: Nach einer Proposition aus §10.6 der Vorlesung gilt die Gleichheit genau dann, wenn einer der Vektoren ein nicht-negatives Vielfaches des anderen ist. Also ist nur (d) richtig. Alternativ zeigt dies eine direkte Rechnung.

2. Für jeden $\mathbb{R}$-Vektorraum V gilt:

   (a) Für jede Bilinearform β auf V ist $\{v \in V : \beta(v,v) = 0\}$ ein Unterraum.

   (b) Für jede Bilinearform β auf V ist $\{v \in V : \beta(v,v) = 1\}$ ein Unterraum.

   (c) Für jedes Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf V ist $\{v \in V : \langle v,v\rangle \neq 0\}$ ein Unterraum.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Für jedes Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ auf V ist $\{v \in V : \langle v,v\rangle = 0\}$ ein Unterraum.

   Erklärung: (a) und (b) sind falsch für die Bilinearform $\left(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}\right) \mapsto x_1y_2$ auf $\mathbb{R}^2$. Auch (c) ist falsch, denn die Menge enthält den Nullvektor nicht. Dagegen ist (d) richtig, weil $\{v \in V : \langle v,v\rangle = 0\} = \{0\}$ ist.

3. Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Aus $v_1 \perp v_2$ und $v_2 \perp v_3$ folgt $v_1 \perp v_3$.

   (b) Aus $v_1 \perp v_2$ und $v_1 \perp v_3$ folgt $v_1 \perp (v_2 + v_3)$.

   (c) Aus $v_1 \perp v_2$ folgt $v_1 \perp -v_2$.

   (d) Aus $v_1 \perp (v_2 + v_3)$ und $v_1 \perp v_2$ folgt $v_1 \perp v_3$.

   Erklärung: Für $v_1 = v_3 \neq 0 = v_2$ ist Aussage (a) falsch. Die übrigen Aussagen folgen aus der Bilinearität des Skalarproduktes.

4. Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien S, $T \subset V$ zwei Teilmengen. Welche der folgenden Eigenschaften ist im allgemeinen nicht äquivalent zu den anderen?

   (a) $S \subset T^{\perp}$

   (b) $T \subset S^{\perp}$

   (c) $S \perp T$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\langle S \rangle \cap \langle T \rangle = \{0\}$

   Erklärung: Es ist $S \perp T$ genau dann, wenn S in der Menge $T^{\perp} = \{v \in V \mid v \perp T\}$ enthalten ist. Also ist (c) äquivalent zu (a), und aus demselben Grund auch zu (b). Dagegen sind die Teilmengen $S := \{\binom{1}{0}\}$ und $T := \{\binom{1}{1}\}$ von $V = \mathbb{R}^2$ nicht orthogonal zueinander, erfüllen aber die Bedingung (d).

5. Sei S eine Teilmenge eines endlichdimensionalen euklidischen Vektorraums V. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) $(S^{\perp})^{\perp} = \langle S \rangle$.

   $\boxed{\text{(b)}}$ S ist das orthogonale Komplement eines Unterraumes von V.

   (c) $S^{\perp}$ ist ein Unterraum von V.

   (d) $V = S^{\perp} \oplus (S^{\perp})^{\perp}$.

   Erklärung: Das orthogonale Komplement eines Unterraumes von V ist immer ein Unterraum. Sofern also S kein Unterraum ist, ist Aussage (b) falsch. Die übrigen Aussagen wurden in der Vorlesung bewiesen.