Musterlösung Single Choice Aufgaben 20

Orthogonalität und Adjungierte Abbildungen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt und den Vektor $v := \frac{1}{\sqrt{5}}\binom{1}{2}$. Welcher Vektor w ergänzt v zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$?

   (a) $w := \binom{1}{0}$

   (b) $w := \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{1}{1}$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $w := \frac{1}{\sqrt{5}}\binom{-2}{1}$

   (d) $w := \frac{1}{2}\binom{2}{-1}$

   Erklärung: Die Vektoren in (a) und (b) sind nicht orthogonal zu v. Der Vektor in (d) ist nicht normiert.

2. Sei V ein euklidischer Vektorraum der Dimension $n < \infty$. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Jedes Orthonormalsystem in V hat Länge $\leqslant n$.

   (b) Jedes Orthonormalsystem in V lässt sich zu einer Orthonormalbasis ergänzen.

   (c) Jedes Orthonormalsystem $(v_1, \ldots, v_n)$ in V ist eine Basis von V.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Jede Basis von V ist ein Orthonormalsystem.

   Erklärung: Da jedes Orthonormalsystem linear unabhängig ist, sind (a) und (c) richtig. Aussage (b) wurde in der Vorlesung bewiesen. Dagegen ist im Allgemeinen nicht jede Basis eine Orthonormalbasis; darum ist (d) falsch.

3. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Das Produkt zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Die Summe zweier orthogonaler Matrizen ist orthogonal.

   (c) Die Transponierte einer orthogonalen Matrix ist orthogonal.

   (d) Die Inverse einer orthogonalen Matrix ist orthogonal.

   Erklärung: Wir wissen, dass die orthogonale Gruppe tatsächlich eine Gruppe ist. Insbesondere ist sie abgeschlossen unter Multiplikation und unter Inversenbildung. Eine schnelle Rechnung zeigt, dass sie auch unter Transposition abgeschlossen ist. Dagegen nicht unter Summen; zum Beispiel ist die Summe zweier Einheitsmatrizen der Grösse > 0 nicht mehr orthogonal. Also ist (b) und nur (b) falsch.

4. Sei V ein euklidischer Vektorraum. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Der Identitäts-Endomorphismus von V ist selbstadjungiert.

   (b) Der Null-Endomorphismus von V ist selbstadjungiert.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Die Verknüpfung selbstadjungierter Endomorphismen ist selbstadjungiert.

   (d) Die Summe zweier selbstadjungierter Endomorphismen ist selbstadjungiert.

   Erklärung: Sind f und g selbstadjungiert, so besitzt $f \circ g$ die Adjungierte $(f \circ g)^* = g^* \circ f^* = g \circ f$, und diese ist nur dann gleich $f \circ g$, wenn f und g miteinander kommutieren. Zum Beispiel sind die Matrizen $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B := \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ beide symmetrisch, ihr Produkt $AB = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ jedoch nicht. Also ist (c) falsch. Dagegen wurden (a) und (b) in der Vorlesung besprochen, und (d) folgt durch schnelle direkte Rechnung.

5. Sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus zwischen zwei euklidischen Vektorräumen mit der Adjungierten $f^*\colon W \to V$. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Falls $f^* \circ f = 0$ ist, gilt $f = 0$.

   (b) Es ist f orthogonal genau dann, wenn $f^* \circ f = \mathrm{id}_V$ ist.

   (c) Der Homomorphismus $f^* \circ f$ ist selbstadjungiert.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Die zu $f^* \circ f$ Adjungierte ist $f \circ f^*$.

   Erklärung: Aus $f^* \circ f = 0$ folgt $\|f(v)\|^2 = \langle f(v), f(v)\rangle = \langle f^*(f(v)), v\rangle = 0$ für alle $v \in V$ und folglich $f(v) = 0$; daher ist (a) richtig. Zweitens ist f genau dann orthogonal, wenn $\langle f^*(f(v)), v'\rangle \stackrel{!}{=} \langle f(v), f(v')\rangle = \langle v, v'\rangle$ ist für alle $v, v' \in V$; darum ist auch (b) richtig. Drittens implizieren die Grundeigenschaften der Adjungierten $(f^* \circ f)^* = f^* \circ (f^*)^* = f^* \circ f$; darum ist auch (c) richtig. Dafür ist (d) schon deshalb im Allgemeinen falsch, weil $f^* \circ f$ und seine Adjungierte Endomorphismen von V sind, wohingegen $f \circ f^*$ ein Endomorphismus von W ist. Aber selbst im Fall $V = W$ ist (d) nur dann richtig, wenn f und f^* miteinander kommutieren.