Musterlösung Single Choice Aufgaben 21

Bilinearformen, Positiv-Definitheit

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussage ist für einen selbstadjungierten Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen euklidischen Vektorraumes V im Allgemeinen *falsch*?

   (a) Es gilt $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f^2)$.

   (b) Es gilt $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Bild}(f^2)$.

   (c) Es gilt $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = \{0\}$.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Die Abbildung $V \times V \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, f(w)\rangle$ ist ein Skalarprodukt.

   Erklärung: Nach dem Spektralsatz ist f diagonalisierbar. Sei also $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis mit $f(v_i) = \lambda_i v_i$ für alle i, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_m = 0$ und $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n \neq 0$. Dann gilt auch $f^2(v_i) = \lambda_i^2 v_i$, und somit bilden $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Kern}(f^2)$ und $v_{m+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Bild}(f^2)$. Daraus folgen (a) und (b) und (c). Dagegen liefert der Null-Endomorphismus ein Gegenbeispiel zu (d), obwohl die Abbildung immer bilinear und symmetrisch ist.

2. Die homogene quadratische Form $q(x, y) := x^2 - 6xy + 5y^2$ hat Darstellungsmatrix

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

   (d) $\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

   Erklärung: Nur die Matrix A in (b) erfüllt $(x, y) \cdot A \cdot \binom{x}{y} = x^2 - 6xy + 5y^2 = q(x, y)$.

3. Welche Aussage ist am Allgemeinen *falsch*?

   (a) Jede positiv definite Bilinearform ist nicht-ausgeartet.

   (b) Jede negativ definite Bilinearform ist nicht-ausgeartet.

   (c) Jede Darstellungsmatrix einer nicht-ausgearteten Bilinearform ist invertierbar.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Jede nicht-ausgeartete Bilinearform ist positiv definit oder negativ definit.

   Erklärung: Die durch $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ induzierte Bilinearform ist nicht-ausgeartet, aber indefinit, also weder positiv noch negativ definit, weshalb (d) falsch ist.

4. Sei A die Darstellungsmatrix einer symmetrischen Bilinearform mit der Signatur (d_0, d_+, d_-) auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V. Welche Aussage ist im Allgemeinen richtig?

   $\boxed{\text{(a)}}$ d_0 ist die Dimension des Kerns der linearen Abbildung L_A.

   (b) d_+ ist die Anzahl strikt positiver Diagonaleinträge von A.

   (c) d_- ist die Anzahl strikt negativer Diagonaleinträge von A.

   (d) $d_+ + d_- = \dim(V)$.

   Erklärung: Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist die Darstellungsmatrix einer symmetrischen Bilinearform und hat die Eigenwerte -1 und 3, hat also Signatur $(0, 1, 1)$. Dies zeigt, dass (b) und (c) falsch sind. Die Nullmatrix ist ein Gegenbeispiel zu (d).

5. Die reelle Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ist positiv definit, weil ...

   (a) die Determinante von A positiv ist.

   (b) die Diagonaleinträge von A positiv sind.

   $\boxed{\text{(c)}}$ $2 > 0$ ist und die Determinante von A positiv ist.

   (d) $2 > 0$ ist und die Spur von A positiv ist.

   Erklärung: Wegen des Hauptminorenkriteriums ist (c) richtig. Die nicht positiv definite Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist ein Gegenbeispiel zu (b) und (d). Die Matrix $-I_2$ ist ein Gegenbeispiel zu (a).