Musterlösung Single Choice Aufgaben 22

Quadratische Formen und Unitäre Vektorräume

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussage ist richtig für jede invertierbare relle symmetrische $n \times n$-Matrix A?

   (a) A ist positiv definit.

   $\boxed{\text{(b)}}$ A^2 ist positiv definit.

   (c) A^{-1} ist positiv definit.

   (d) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $c \cdot A$ positiv definit ist.

   Erklärung: Für alle $v \in \mathbb{R}^n$ ist $Av \neq 0$ und somit $v^T A^2 v = v^T A^T A v = (Av)^T (Av) = \|Av\|^2 > 0$, also ist (b) richtig. Als Gegenbeispiel zu (a), (c) und (d) dient der Fall $n = 2$ und die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Welche Aussage ist richtig für jede reelle $m \times n$-Matrix A?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Die Singulärwerte von A sind alle positiv.

   (b) A besitzt Singulärwerte nur im Fall $m = n$.

   (c) Die Singulärwerte von A sind die Eigenwerte von $A^T A$.

   (d) Eine Singulärwertzerlegung existiert nur, falls A positiv definit ist.

   Erklärung: Nach Definition sind Singulärwerte strikt positiv, also gilt (a). Die Singulärwertzerlegung existiert auch für $m \neq n$ und für nicht positiv-definite Matrizen, weshalb (b) und (d) falsch sind. Die quadrierten (!) Singulärwerte sind die Eigenwerte von $A^T A$, weshalb (c) falsch ist.

3. Sei γ eine hermitesche Sesquilinearform auf einem komplexen Vektorraum V. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) $\forall v \in V\colon\ \gamma(v, v) \in \mathbb{R}$.

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\forall v, w \in V\colon\ \gamma(v, w) = \gamma(w, v)$.

   (c) $\forall v, w \in V\colon\ \gamma(v + w, v) = \gamma(v, v) + \gamma(w, v)$.

   (d) $\forall v \in V,\ \lambda \in \mathbb{C}\colon\ \gamma(\lambda v, v) = \gamma(v, \overline{\lambda} v)$.

   Erklärung: Für alle $v, w \in V$ gilt $\gamma(v, w) = \overline{\gamma(w, v)}$, daher ist Aussage (b) falsch. Dagegen ist (c) Teil der Definition einer Sesquilinearform, und (a) wurde in der Vorlesung gezeigt. Schliesslich gilt (d) wegen der Rechnung $\gamma(\lambda v, v) = \overline{\lambda} \gamma(v, v) = \gamma(v, \overline{\lambda} v)$.

4. Die komplexe Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ ist

   (a) hermitesch.

   $\boxed{\text{(b)}}$ normal, aber nicht hermitesch.

   (c) symmetrisch, aber nicht normal.

   (d) unitär.

   Erklärung: Es gilt $A^* = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{smallmatrix}\right) \neq A$; also ist A nicht hermitesch. Dagegen berechnet man direkt, dass $A^*A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = AA^*$ ist; also ist A normal. Dies zeigt auch, dass $A^*A \neq I_2$ ist; somit ist A nicht unitär.

5. Sei A die Darstellungsmatrix einer hermiteschen Sesquilinearform. Dann

   (a) sind alle Einträge von A reell.

   $\boxed{\text{(b)}}$ sind alle Diagonaleinträge von A reell.

   (c) ist A symmetrisch.

   (d) hat A nur reelle und positive Eigenwerte.

   Erklärung: Die Diagonaleinträge bleiben unter Transposition erhalten. Deshalb müssen die Diagonaleinträge einer hermiteschen Matrix gleich ihren komplex Konjugierten, also reell, sein.

6. Für welche $x \in \mathbb{C}$ ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} x & -x \\ x & x \end{pmatrix}$ unitär?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x|^2 = \frac{1}{2}$.

   (b) Genau für $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   (c) Für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $x = -\overline{x}$.

   (d) Für $x = 0$.

   Erklärung: Wir berechnen $AA^* = \left(\begin{smallmatrix} 2x\overline{x} & 0 \\ 0 & 2x\overline{x} \end{smallmatrix}\right) = 2 \cdot |x|^2 \cdot I_2$; also ist (a) richtig.