Musterlösung Single Choice Aufgaben 23

Unitäre Vektorräume

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Die Singulärwerte der Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$ sind

   (a) 2 und i.

   (b) 4.

   (c) $\sqrt{2}$ und 2.

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\sqrt{5}$.

   Erklärung: Es gilt $A^*A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, also hat A^*A den doppelten Eigenwert 5. Daraus folgt, dass A den doppelten Singulärwert $\sqrt{5}$ hat.

2. Sei A eine hermitesche $n \times n$-Matrix. Welche der folgenden Eigenschaften ist nicht äquivalent zu den anderen?

   (a) A ist positiv definit.

   (b) A hat nur strikt positive Eigenwerte.

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\det(A) = 1$.

   (d) A ist von der Form B^*B für eine invertierbare Matrix B.

   Erklärung: Die Matrix $-I_2$ ist hermitesch und hat Determinante 1, ist aber nicht positiv definit. Die Äquivalenz der Aussagen (a), (b) und (c) ist Teil eines Satzes aus der Vorlesung.

3. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & -z \\ z & 1 \end{pmatrix}$ normal?

   (a) Genau für $z = 0$.

   (b) Genau für $z \neq 0$.

   (c) Genau für $z \in \mathbb{R}$.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Genau für $z \in i\mathbb{R}$.

   Erklärung: Es gilt

$$A^*A = \begin{pmatrix} 0 & \overline{z} \\ -\overline{z} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z \\ z & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\overline{z} & \overline{z} \\ z & 1 + z\overline{z} \end{pmatrix}$$

   und

$$AA^* = \begin{pmatrix} 0 & -z \\ z & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \overline{z} \\ -\overline{z} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\overline{z} & -z \\ -\overline{z} & 1 + z\overline{z} \end{pmatrix}.$$

   Somit ist A genau dann normal, wenn $z = -\overline{z}$ gilt, also wenn $z \in i\mathbb{R}$ ist.

4. Sei V ein unitärer Vektorraum. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Jeder unitäre Endomorphismus ist normal.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Jeder unitäre Endomorphismus, der selbstadjungiert ist, ist die Identität.

   (c) Jeder normale Endomorphismus, der nur 1 als Eigenwert hat, ist die Identität.

   (d) Jeder normale Endomorphismus, dessen Eigenwerte alle Norm 1 haben, ist unitär.

   Erklärung: Die Aussage (a) ist aus der Vorlesung bekannt Der Endomorphismus $-\mathrm{id}_V$ ist selbstadjungiert und unitär und somit ein Gegenbeispiel zu (b). Schliesslich beachten wir, dass jeder normale Endomorphismus unitär diagonalisierbar ist. Danach stehen die Eigenwerte auf der Diagonalen und (c) und (d) folgen direkt.

5. Sei f ein Endomorphismus eines unitären Vektorraumes, der nur den Eigenwert 1 besitzt. Dann ist f

   (a) unitär.

   (b) normal.

   (c) selbstadjungiert.

   $\boxed{\text{(d)}}$ im Allgemeinen nichts von oben.

   Erklärung: Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist nicht diagonalisierbar. Nach dem Spektralsatz kann sie daher weder unitär, noch selbstadjungiert, noch normal sein.