Musterlösung Single Choice Aufgaben 25

Multilineare Abbildungen, Tensorprodukt

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Seien V_1, V_2, V_3, W euklidische Vektorräume und seien $f_i \colon V_i \to W$ für $1 \leqslant i \leqslant 3$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Abbildungen $V_1 \times V_2 \times V_3 \to W$ ist multilinear?

   (a) $(v_1, v_2, v_3) \mapsto f_1(v_1) + f_2(v_2) + f_3(v_3)$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $(v_1, v_2, v_3) \mapsto \langle f_1(v_1), f_2(v_2)\rangle \cdot f_3(v_3)$

   (c) $(v_1, v_2, v_3) \mapsto f_1(v_1)$

   (d) $(v_1, v_2, v_3) \mapsto \langle f_1(v_1), f_2(v_2)\rangle \cdot \langle f_1(v_1), f_3(v_3)\rangle \cdot w$, für ein fixiertes $w \in W$.

   Erklärung: Die Abbildung (b) ist multilinear wegen der Bilinearität des Skalarprodukts und der Linearität von f_1, f_2, f_3. Hingegen definieren die Formeln in (a) und (c) lineare Abbildungen $V_1 \boxplus V_2 \boxplus V_3 = V_1 \times V_2 \times V_3 \to W$, jedoch keine multilineare Abbildung. Auch die Abbildung (d) ist nicht multilinear, weil sie in der ersten Variablen nicht linear ist.

2. Welche reelle Matrix repräsentiert eine alternierende Bilinearform?

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   Erklärung: Alternierend ist äquivalent dazu, dass die Koeffizienten auf der Diagonale verschwinden und die übrigen Koeffizienten nach Spiegelung an der Hauptdiagonalen mit einem Minuszeichen versehen werden. Dies ist nur bei (d) der Fall.

3. Für jede Linearform $\varphi \colon V \to K$ ist die Abbildung

   $$V^r \to K,\ (v_1, \ldots, v_r) \mapsto \prod_{i=1}^{r} \varphi(v_i)$$

   $\boxed{\text{(a)}}$ eine symmetrische Multilinearform.

   (b) eine alternierende Multilinearform.

   (c) eine Multilinearform, die weder symmetrisch noch alternierend ist.

   (d) keine Multilinearform.

   Erklärung: Hält man alle Variablen ausser einer fest, so definiert die Formel eine lineare Abbildung dieser einen Variablen. Somit ist die Abbildung multilinear. Wegen der Kommutativität des Produktes ist sie zudem symmetrisch. Dagegen ist sie wegen $\varphi(v, \ldots, v) = \varphi(v)^r$ im allgemeinen nicht alternierend.

4. Welche der folgenden Aussagen ist eine korrekte universelle Eigenschaft für eine Basis S eines K-Vektorraumes V?

   $\boxed{\text{(a)}}$ Für jeden K-Vektorraum W besitzt jede Abbildung $S \to W$ eine eindeutige Fortsetzung zu einer linearen Abbildung $V \to W$.

   (b) Für jeden K-Vektorraum W faktorisiert jede lineare Abbildung $W \to V$ durch eine eindeutige Abbildung $W \to S$.

   (c) Für jede Teilmenge $T \subset V$ kann jedes Element von S eindeutig als Linearkombination von Elementen von T ausgedrückt werden.

   (d) Für jeden K-Vektorraum W existiert genau eine lineare Abbildung $V \to W$, so dass das Bild von S linear unabhängig ist.

   Erklärung: Die korrekte universelle Eigenschaft einer Basis ist (a). Alle übrigen Aussagen sind falsch: Ein Gegenbeispiel zu (b) ist die identische Abbildung auf $V = K$ mit der Basis $\{1\}$, eines zu (c) die Teilmenge $T = \{0_V\}$, und (d) ist falsch für $V \neq 0 = W$.

5. Seien V und W zwei K-Vektorräume. Welche Aussage ist im Allgemeinen falsch?

   (a) Falls V und W endlichdimensional sind, so ist $V \otimes_K W$ endlichdimensional.

   $\boxed{\text{(b)}}$ Falls $V \otimes_K W$ endlichdimensional ist, so sind V und W endlichdimensional.

   (c) Falls V und W nicht der Nullraum sind, so ist $V \otimes_K W$ nicht der Nullraum.

   (d) Falls $V \otimes_K W$ nicht der Nullraum ist, so sind V und W nicht der Nullraum.

   Erklärung: Falls V der Nullraum und W unendlichdimensional ist, so ist $V \otimes_K W$ der Nullraum, also endlichdimensional. Deshalb ist Aussage (b) falsch. Die übrigen Aussagen wurden in der Vorlesung gezeigt.