Musterlösung Single Choice Aufgaben 26

Höhere Tensorprodukte und alternirende Potenzen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welche Aussage ist richtig für alle Vektorräume V und W?

   (a) $V^\vee \otimes_K W \cong \mathrm{Hom}_K(V, W)$.

   (b) $V \otimes_K K \cong V \boxplus V$.

   (c) $\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K(V) + \dim_K(W)$.

   $\boxed{\text{(d)}}$ $V \otimes_K W \cong W \otimes_K V$.

   Erklärung: Die Isomorphie (a) gilt nur, wenn mindestens einer von V, W endlichdimensional ist. Die Formel in (c) ist falsch; richtig wäre $\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K(V) \cdot \dim_K(W)$. Deshalb ist auch (b) im Allgemeinen falsch, denn die linke Seite hat Dimension $\dim_K(V)$ und die rechte Seite Dimension $2\dim_K(V)$. Dagegen folgt die Symmetrie (d) des Tensorproduktes aus der universellen Eigenschaft.

2. Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

   (a) $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

   (b) Für jeden $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum.

   $\boxed{\text{(c)}}$ Jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist auch ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der gleichen Dimension.

   (d) $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ ist ein vierdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum.

   Erklärung: Aussage (c) ist falsch, denn jeder $\mathbb{C}$-Vektorraum V ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}}(V)$.

3. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine beliebige Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^n$. Welches Tupel ist dann immer eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{C}^n$?

   (a) $(v_1, \overline{v_1}, \ldots, v_n, \overline{v_n})$

   (b) $(v_1, \ldots, v_n)$

   (c) $(v_1 + iv_1, \ldots, v_n + iv_n)$

   $\boxed{\text{(d)}}$ $(v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n)$

   Erklärung: Antwort (d) wurde in der Lösung von Aufgabe 8 der Übungsserie 25 gezeigt. Antwort (a) ist falsch für die Standard-Basis, und die Antworten (b) und (c) sind falsch aus Dimensionsgründen wegen $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$.

4. Seien T, L bzw. M die eindimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräume, in denen die skalaren physikalischen Grössen Zeit, Länge bzw. Masse liegen. In welchem Tensorraum liegt die physikalische Grösse „Druck“?

   (a) $M^\vee \otimes L \otimes (T^\vee)^{\otimes 2}$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $M \otimes L^\vee \otimes (T^\vee)^{\otimes 2}$

   (c) $M^\vee \otimes L \otimes T^{\otimes 2}$

   (d) $M \otimes L^\vee \otimes T^{\otimes 2}$

   Erklärung: Druck wird beschrieben als Kraft pro Fläche. Die Tensorräume für Kraft bzw. Fläche sind $M \otimes L \otimes (T^\vee)^{\otimes 2}$ bzw. $L^{\otimes 2}$. Also liegt Kraft pro Fläche in dem Tensorraum $(M \otimes L \otimes (T^\vee)^{\otimes 2}) \otimes (L^{\otimes 2})^\vee$. Wegen des natürlichen Isomorphismus $L^\vee \otimes L \cong \mathbb{R}$ ist dieser Tensorraum natürlich isomorph zu $M \otimes L^\vee \otimes (T^\vee)^{\otimes 2}$. Folglich ist nur Antwort (b) korrekt. *Aliter*: Die SI-Grundeinheit für Druck ist $1 Pa = 1 N \cdot m^{-2} = 1 \text{ kg} \cdot m \cdot \text{s}^{-2} \cdot m^{-2} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

5. Welche der folgenden Aussagen gilt für alle $r, s \geqslant 1$ und alle endlichdimensionalen K-Vektorräume V und W?

   (a) $\dim_K T^{r,s}(V) = (\dim_K(V))^{rs}$

   (b) $\dim_K(V^{\otimes r} \otimes_K (W^\vee)^{\otimes s}) = \dim_K(V \otimes_K W)^{r+s}$

   $\boxed{\text{(c)}}$ $\dim_K(T^{r,s}(V) \otimes_K T^{s,r}(W)) = (\dim_K(V) \cdot \dim_K(W))^{r+s}$

   (d) $\dim_K(V^{\otimes \dim_K(W)}) = \dim_K(W^{\otimes \dim_K(V)})$

   Erklärung: Für endlichdimensionale K-Vektorräume gilt $\dim_K(V) = \dim_K(V^\vee)$ und $\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K(V) \cdot \dim_K(W)$. Daraus folgt weiter $\dim_K(V^{\otimes r}) = \dim_K((V^\vee)^{\otimes r}) = \dim_K(V)^r$ und somit $\dim_K(T^{r,s}(V)) = \dim_K(V)^{r+s}$. Durch Kombinieren dieser Formeln zeigt man, dass im Allgemeinen nur Antwort (c) gültig ist.