Musterlösung Single Choice Aufgaben 27

Tensor-, symmetrische, und äussere Potenzen

Sie haben 15 Minuten Zeit, um die 5 untenstehenden Aufgaben zu lösen. Es ist jeweils genau eine Antwort richtig.

1. Welcher der folgenden Tensoren in $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ ist nicht gleich den anderen?

   (a) $\binom{2}{-1} \otimes \binom{4}{2}$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\binom{0}{-1} \otimes \binom{4}{0} + \binom{2}{0} \otimes \binom{0}{2}$

   (c) $\binom{4}{-2} \otimes \binom{2}{1}$

   (d) $\binom{2}{-1} \otimes \binom{4}{0} + \binom{4}{-2} \otimes \binom{0}{1}$

   Erklärung: Nachrechnen, indem man jeden Tensor mittels der Bilinearität des Tensorprodukts in die eindeutige Form $v \otimes \binom{1}{0} + w \otimes \binom{0}{1}$ bringt. *Aliter:* Nach der Vorlesung existiert ein Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ mit $v \otimes w \mapsto v \cdot w^T$. Dabei entsprechen der Vektor in (b) der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und die übrigen Vektoren der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 8 & 4 \\ -4 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.

2. Welche der folgenden Elemente in $\Lambda^2\mathbb{R}^2$ ist nicht gleich den anderen?

   (a) $\binom{2}{-1} \wedge \binom{4}{-2}$

   $\boxed{\text{(b)}}$ $\binom{0}{-2} \wedge \binom{3}{0} + \binom{1}{0} \wedge \binom{0}{6}$

   (c) $\binom{2}{1} \wedge \binom{4}{0} + \binom{4}{-2} \wedge \binom{0}{1}$

   (d) 0

   Erklärung: Der Ausdruck in (a) hat die Form $v \wedge 2v = 2(v \wedge v) = 0$. Der Ausdruck in (c) ist gleich $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, da die äusseren Summanden verschwinden und die mittleren einander wegheben. Das Ergebnis in (c) ist hingegen $-6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und somit ungleich Null.

3. Es sei V ein K-Vektorraum. Wann gibt es $v, w \in V$ mit $v \wedge w \neq w \wedge v$?

   (a) Nie.

   (b) Falls $1 + 1 = 0$ ist in K.

   (c) Falls $\dim_K(V) \leqslant 1$ ist.

   $\boxed{\text{(d)}}$ Falls $1 + 1 \neq 0$ ist in K und $\dim_K(V) > 1$.

   Erklärung: Ist $1 + 1 = 0$ in K oder $\dim_K(V) \leqslant 1$, so gilt $v \wedge w = w \wedge v$ für alle $v, w \in V$. Ist hingegen $1 + 1 \neq 0$ in K und $\dim_K(V) > 1$, so ist $v \wedge w = -w \wedge v \neq w \wedge v$ für alle linear unabhängigen $v, w \in V$. Folglich ist nur Antwort (d) korrekt.

4. Es sei V ein K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen ist nicht äquivalent zu den anderen?

   (a) $\dim_K(V)$ ist endlich.

   (b) $\dim_K(V^\vee)$ ist endlich.

   (c) $\dim_K(\Lambda V)$ ist endlich.

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\dim_K(SV)$ ist endlich.

   Erklärung: Nach §5.10 der Vorlesung ist (a) äquivalent zu (b). Nach §12.7 gilt (a)⇒(c), und wegen $V = \Lambda^1 V \hookrightarrow \Lambda V$ gilt auch (c)⇒(a). Dagegen ist $\dim_K(SV) = \infty$ für jeden von Null verschiedenen Vektorraum; also ist (d) die richtige Antwort.

5. Sei f ein Endomorphismus eines K-Vektorraums V. Welche Aussage ist im Allgemeinen nicht äquivalent zu den anderen?

   (a) $f\colon V \to V$ ist ein Isomorphismus.

   (b) $f^{\otimes 2}\colon V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ ist ein Isomorphismus.

   (c) $S^2 f\colon S^2 V \to S^2 V$ ist ein Isomorphismus.

   $\boxed{\text{(d)}}$ $\Lambda^2 f\colon \Lambda^2 V \to \Lambda^2 V$ ist ein Isomorphismus.

   Erklärung: Ist f ein Isomorphismus, so folgt aus der Funktorialität der drei Konstruktionen schnell, dass auch $f^{\otimes 2}$, $S^2 f$, $\Lambda^2 f$ Isomorphismen sind. Für einen davon gilt aber die Umkehrung nicht:

   Sei f der Null-Endomorphismus von $V := K$. Dann ist auch $f^{\otimes 2}$ und $S^2 f$ und $\Lambda^2 f$ jeweils der Null-Endomorphismus. Da V, $V^{\otimes 2}$, $S^2 V$ alle ungleich Null sind, sind also f, $f^{\otimes 2}$, $S^2 f$ keine Isomorphismen. Wegen $\Lambda^2 V = 0$ ist aber $\Lambda^2 f$ ein Isomorphismus! Daher ist (d) nicht äquivalent zu den anderen Aussagen.